

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

---

---

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.  
ILMIY  
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади  
Йилда 6 марта чиқади

5-2020

**НАУЧНЫЙ  
ВЕСТНИК.  
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года  
Выходит 6 раз в год

|  |    |
|--|----|
| <b>А.Абдурахмонов</b>  |    |
| Яшил рангинг миллий шеъриятда ўзига хос ифодаси (испан ва ўзбек лирикаси мисолида) ..... | 79 |
| <b>О.Абобакирова</b>   |    |
| Ўзбек болалар ҳикоячилигининг бадий хусусиятлари.....                                    | 83 |
| <b>Д.Турдалиев</b>   |    |
| Рус фольклоршунослигида анъанавий лингвистик формулалар.....                             | 92 |
| <b>И.Ҳабибуллаев</b>   |    |
| Хуршид Дўстмуҳаммад қиссаларида руҳий-психологик тасвир (“Нигоҳ” қиссаси асосида).....   | 98 |

#### ТИЛШУНОСЛИК

|   |     |
|---|-----|
| <b>А.Муҳиддинов</b>   |     |
| Нутқ актини биомолекуляр ва ментал кодлаштириш жараёнларининг изоморфлиги ва алломорфлиги .....       | 103 |
| <b>Р.Сайфуллаева, Ҳ.Ҳамроева</b>  |     |
| Ўзбек рақс терминларининг лингвокультурологик таснифи.....  | 108 |
| <b>З.Акбарова</b>   |     |
| Турли функционал услублардаги матнларда тил воситаларидан фойдаланган ҳолда оламни моделлаштириш..... | 113 |
| <b>Н.Шарафутдинова</b>  |     |
| Ўткир Ҳошимовнинг “Тушда кечган умрлар” асарида қўлланилган мифоним ва теонимлар таҳлили.....         | 118 |
| <b>Ў.Исламов</b>  |     |
| Адабий тил - нутқ маданиятининг олий шакли.....   | 122 |
| <b>Л.Абдуллаева</b>   |     |
| Аббревиация-ўзбек ва инглиз тилларида сўз ясаш усули сифатида.....                                    | 126 |

#### ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ

|  |     |
|--|-----|
| <b>С.Абдурахмонов, Ш.Ибрагимов</b>   |     |
| Талабаларнинг мустақил ишларини ташкил этишнинг ташкилий усуллари.....                 | 129 |
| <b>У.Абдуллаева</b>  |     |
| Чет тили бўйича кўникмаларни баҳолашда ёш хусусиятларига кўра ёндашув принциплари..... | 134 |

#### ИЛМИЙ АХБОРОТ

|   |     |
|---|-----|
| <b>Ў.Омонова</b>  |     |
| Алмаштириш операторларини қуришнинг композицион усули ҳақида.....   | 139 |
| <b>А.Раҳматжонзода</b>  |     |
| Баъзи умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини топиш масалалари.....  | 143 |
| <b>Б.Каримов, Р.Эргашев, А.Сирождидинов</b>   |     |
| Sn асосида шаффоф ўтказувчи электродлар.....  | 147 |
| <b>А.Урунов, С.Элмонов</b>  |     |
| Тишли-ричагли механизмлардан тузилган комбинацион механизмнинг параметрларини асослаш ва кинематик текшириш .....                                   | 150 |
| <b>Д.Аббосова, А.Ибрагимов, О.Назаров</b>   |     |
| Ephedra equisetina bunge ўсимлиги баргларида олинган эфир мойи таркибий қисмларининг ГХ-МС таҳлили.....   | 154 |
| <b>М.Ахмадалиев, И.Асқаров, Н.Юсупова, М.Икромова</b>   |     |
| ЗФАМЭД смоласининг олиниши.....   | 158 |
| <b>С.Маматқулова, Ш.Абдуллаев, Р.Деҳқонов</b>   |     |
| Helianthus tuberosus L. (Топинамбур) ўсимлиги илдиз мевасидан турли муҳитларда пектин моддасини ажратиш олиш ва функционал гуруҳларини аниқлаш..... | 161 |

БАЪЗИ УМУМЛАШГАН ГИПЕРГЕОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ИНТЕГРАЛ  
КЎРИНИШИНИ ТОПИШ МАСАЛАЛАРИ

ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ  
ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

PROBLEMS OF FINDING INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOME GENERALIZED  
HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

А.Раҳматжонзода

<sup>1</sup> А.Раҳматжонзода

— ФарДУ математика йўналиши 2-курс  
магистранти.

**Аннотация**

Мақолада баъзи умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини топиш масалалари ўрганилган.

**Аннотация**

В статье исследуются проблемы нахождения интегрального представления некоторых обобщенных гипергеометрических функций.

**Annotation**

This article examines the problem of finding the integral representation of some generalized hypergeometric functions.

**Таянч сўз ва иборалар:** умумлашган гипергеометрик функция, Лежандр мултипликатив формуласи, Гауссинг гипергеометрик функцияси.

**Ключевые слова и выражения:** обобщенная гипергеометрическая функция, мультипликативная формула Лежандра, гипергеометрическая функция Гаусса.

**Keywords and expressions:** generalized hypergeometric function, Legendre multiplicative formula, Gaus's hypergeometric function.

Битта параметри суратда, иккинчиси махражда бўлган иккита параметрли гипергеометрик функция куйидаги кўринишга эга [1]:

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix}; x \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j x^j}{(\gamma)_j j!}; \quad \forall \beta, \gamma, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$$

Иккита параметри суратда ва битта параметри махражда бўлган Гауссинг гипергеометрик функцияси [1] ушбу

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; x \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (\beta)_j x^j}{(\gamma)_j j!}; \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad |x| < 1,$$

кўринишда бўлади, бу ерда  $(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1)$ ;  $m \geq 1$ ;  $(\alpha)_0 = 1$

Ушбу гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишга эга бўлиш шартлари ва интеграл кўринишлари куйидаги леммаларда келтирилган [1, 2]:

**1-лемма.** Агар  $\gamma > \beta > 0$  бўлса, у ҳолда

$${}_1F_1 \left[ \begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix}; x \right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} e^{xt} dt,$$

тенглик ўринли бўлади.

**2-лемма.** Агар  $\gamma > \beta > 0$ ,  $|x| < 1$  бўлса, у ҳолда

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; x \right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} dt$$

тенглик ўринли бўлади [3].

Драйвер ва Жонстон [4], кейинчалик умумлашган гипергеометрик функцияларнинг бир синфи учун қуйидаги интеграл кўринишини топишган:

**3-лемма.** Агар  $\gamma > \beta > 0$ ,  $m \geq 1$ ,  $|x| < 1$  бўлса, у ҳолда

$${}_{m+1}F_m \left[ \begin{matrix} \alpha, \frac{\beta}{m}, \frac{\beta+1}{m}, \dots, \frac{\beta+m-1}{m} \\ \frac{\gamma}{m}, \frac{\gamma+1}{m}, \dots, \frac{\gamma+m-1}{m} \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-xt^m)^{-\alpha} dt,$$

тенглик ўринли бўлади.

Шунга ўхшаш далиллардан фойдаланиб, [5] Ҳабибуллоҳ ва Мубин ишида умумлашган гипергеометрик функциянинг қулай интеграл кўриниши аниқланган .

**4-лемма.** Агар  $\gamma > \beta > 0$ ,  $m \geq 1$  бўлса, у ҳолда

$${}_mF_m \left[ \begin{matrix} \frac{\beta}{m}, \frac{\beta+1}{m}, \dots, \frac{\beta+m-1}{m} \\ \frac{\gamma}{m}, \frac{\gamma+1}{m}, \dots, \frac{\gamma+m-1}{m} \end{matrix} ; x \right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} e^{xt^m} dt,$$

тенглик ўринли бўлади.

Ушбу бўлимда биз Лежандр мултипликатив формуласидан фойдаланиб, умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини аниқлаймиз. Бундан ташқари, биз бу интеграл кўриниши аралаш гипергеометрик функциялар бўйича баъзи натижаларни олиш учун ишлатамиз. Лежандрнинг мултипликатив формуласи [1] ушбу кўринишга эга

$$\prod_{s=1}^m \Gamma\left(\alpha + \frac{s-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2}-m\alpha} \Gamma(m\alpha). \quad (1)$$

Бу формула қуйида келтирилган умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини олиш учун ишлатилди:

**1-теорема.** Агар  $c > b > 0$ ,  $|x| < 1$  бўлса, у ҳолда

$${}_3F_2\left(a, b, b + \frac{1}{2}; c, c + \frac{1}{2}; x\right) = \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \int_0^1 t^{2b-1} (1-t)^{2c-2b-1} (1-xt^2)^{-a} dt. \quad (2)$$

**Исбот.** Айтайлик  $|x| < 1$  бўлсин.

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(a, b, b + \frac{1}{2}; c, c + \frac{1}{2}; x\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j \left(b + \frac{1}{2}\right)_j x^j}{(c)_j \left(c + \frac{1}{2}\right)_j j!} = \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b + \frac{1}{2}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j \Gamma(b+j)\Gamma\left(b + j + \frac{1}{2}\right) x^j}{\Gamma(c+j)\Gamma\left(c + j + \frac{1}{2}\right) j!} \end{aligned}$$

бу ерда  $(a)_j = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$ .

Энди биз (1) формуладан фойдаланамиз ва қуйидаги ифодаларни оламиз.

$${}_3F_2\left(a, b, b + \frac{1}{2}; c, c + \frac{1}{2}; x\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j \Gamma(2b+2j)\Gamma(2c-2b)}{\Gamma(2c+2j)} \frac{x^j}{j!} = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \sum_{j=0}^{\infty} (a)_j \left( \int_0^1 t^{2b-2j-1} (1-t)^{2c-2b-1} dt \right) \frac{x^j}{j!} = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \int_0^1 t^{2b-1} (1-t)^{2c-2b-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} (a)_j \frac{(xt^2)^j}{j!} \right) dt = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \int_0^1 t^{2b-1} (1-t)^{2c-2b-1} (1-xt^2)^{-a} dt.
\end{aligned}$$

**2-теорема.** Агар  $c > b > 0$ ,  $a > 0$ ,  $c > \frac{1}{2}a$ , бўлса, у ҳолда

$${}_3F_2\left(a, b, b + \frac{1}{2}; c, c + \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{\Gamma(2c)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a)\Gamma(2c-2b)} {}_2F_1(a, 2b; 2c-a; -1)$$

**Исбот.** (2) формулага  $x = 1$  ни қўйиб, қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a, b, b + \frac{1}{2}; c, c + \frac{1}{2}; 1\right) = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \int_0^1 t^{2b-1} (1-t)^{2c-2b-1} (1-t^2)^{-a} dt = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \int_0^1 t^{2b-1} (1-t)^{2c-2b-a-1} (1+t)^{-a} dt = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \int_0^1 t^{2b-1} (1-t)^{2c-2b-a-1} \sum_{j_1=0}^{\infty} \binom{-a}{j_1} t^{j_1} dt = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \sum_{j_1=0}^{\infty} \binom{-a}{j_1} \int_0^1 t^{2b+j_1-1} (1-t)^{2c-2b-a-1} dt = \\
&= \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)} \sum_{j_1=0}^{\infty} \binom{-a}{j_1} \frac{\Gamma(2b+j_1)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a+j_1)} = \\
&= \frac{\Gamma(2c)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a)\Gamma(2c-2b)} \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{(a)_{j_1} (2b)_{j_1} (-1)^{j_1}}{(2c-a)_{j_1} j_1!} = \\
&= \frac{\Gamma(2c)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a)\Gamma(2c-2b)} {}_2F_1(a, 2b; 2c-a; -1).
\end{aligned}$$

**1-хулоса.** Агар  $c > b > 0$ ,  $c > \frac{1}{2}n$  бўлса, у ҳолда

$${}_3F_2\left(-n, b, b + \frac{1}{2}; c, c + \frac{1}{2}; 1\right) = \frac{(2c-2b)_n}{(2c)_n} {}_2F_1(-n, 2b; 2c+n; -1).$$

**3-теорема.** Агар  $c > b > 0$ ,  $|x| < 1$  бўлса, у ҳолда

$${}_4F_3\left(a, b, b + \frac{1}{3}, b + \frac{2}{3}; c, c + \frac{1}{3}, c + \frac{2}{3}; x\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)} \int_0^1 t^{3b-1} (1-t)^{3c-3b-1} (1-xt^3)^{-a} dt.$$

**Исбот.** Айтайлик  $|x| < 1$  бўлсин.

$${}_4F_3\left(a, b, b + \frac{1}{3}, b + \frac{2}{3}; c, c + \frac{1}{3}, c + \frac{2}{3}; x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j \left(b + \frac{1}{3}\right)_j \left(b + \frac{2}{3}\right)_j x^j}{(c)_j \left(c + \frac{1}{3}\right)_j \left(c + \frac{2}{3}\right)_j j!} =$$

$$= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(c + \frac{2}{3}\right)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(b + \frac{2}{3}\right)} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j \Gamma(b+j)\Gamma\left(b + j + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(b + j + \frac{2}{3}\right) x^j}{\Gamma(c+j)\Gamma\left(c + j + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(c + j + \frac{2}{3}\right) j!}$$

бу ерда  $(\alpha)_j = \frac{\Gamma(\alpha + j)}{\Gamma(\alpha)}$ .

Энди биз (1) формуладан фойдаланамиз ва қуйидаги ифодаларни оламиз.

$${}_4F_3\left(a, b, b + \frac{1}{3}, b + \frac{2}{3}; c, c + \frac{1}{3}, c + \frac{2}{3}; x\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j \Gamma(3b+3j)\Gamma(3c-3b) x^j}{\Gamma(3c+3j) j!} =$$

$$= \frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)} \sum_{j=0}^{\infty} (a)_j \left( \int_0^1 t^{3b+3j-1} (1-t)^{3c-3b-1} dt \right) \frac{x^j}{j!} =$$

$$= \frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)} \int_0^1 t^{3b-1} (1-t)^{3c-3b-1} \left( \sum_{j=0}^{\infty} (a)_j \frac{(xt^3)^j}{j!} \right) dt =$$

$$= \frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)} \int_0^1 t^{3b-1} (1-t)^{3c-3b-1} (1-xt^3)^{-a} dt.$$

**Адабиётлар:**

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. —Т.1,2.—М.: Наука, 1973.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.Ф., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. 2-е изд., исправ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. — Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012.
4. Driver K.A. and Johnston S. J. (2006). An integral representation of some hypergeometric functions. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. Vol. 25, pp.
5. Habibullah G.M. and Mubeen S. (2011).  $L^p$ -Bounded operators involving generalized hypergeometric functions. *Integral Transforms and Special Functions*. Vol. 22, pp.

(Тақризчи: А.Қ.Ўринов — физика-математика фанлари доктори, профессор).