ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

ТИЛШУНОСЛИК

ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ

ИЛМИЙ АХБОРОТ

УДК: 517.588

БАЪЗИ УМУМЛАШГАН ГИПЕРГЕОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ИНТЕГРАЛ КЎРИНИШИНИ ТОПИШ МАСАЛАЛАРИ

ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

PROBLEMS OF FINDING INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOME GENERELIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

А.Раҳматжонзода

[1] **А.Раҳматжонзода** – *ФарДУ математика йўналиши 2-курс магистранти.*

Аннотация

Мақолада баъзи умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини топиш масалалари ўрганилган.

Аннотация

В статье исследуются проблемы нахождения интегрального представления некоторых обобщенных гипергеометрических функций.

Annotation

This article examines the problem of finding the integral representation of some generalized hypergeometric functions.

Таянч сўз ва иборалар: *умумлашган гипергеометрик функция, Лежандр мултипликатив формуласи, Гаусснинг гипергеометрик функцияси.*

Ключевые слова и выражения: *обобщенная гипергеометрическая функция, мультипликативная формула Лежандра, гипергеометрическая функция Гаусса.*

Keywords and expressions: *generalized hypergeometric function, Legendre multiplicative formula, Gaus's hypergeometric function.*

Битта параметри суратда, иккинчиси махражда бўлган иккита параметрли гипергеометрик функция қуйидаги кўринишга эга $[1]$:

$$ {}_1F_1\left[\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\beta)_j}{(\gamma)_j}\frac{x^j}{j!};\ \forall\beta,\gamma,\ \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots . $$

Иккита параметри суратда ва битта параметри махражда бўлган Гауснинг гипергеометрик функцияси $[1]$ ушбу

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_j(\beta)_j}{(\gamma)_j}\frac{x^j}{j!};\ \ \forall\alpha,\beta,\gamma,\ \gamma\neq 0,-1,-2,\ldots,\ \ |x|<1, $$

кўринишда бўлади, бу ерда $(\alpha)_{\mathrm{m}}=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m-1);\ m\geq 1;\ (\alpha)_0=1$

Ушбу гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишга эга бўлиш шартлари ва интеграл кўринишлари қуйидаги леммаларда келтирилган $[1,2]$:

1-лемма. Агар $\gamma>\beta>0$ бўлса, у ҳолда

$$ {}_1F_1\left[\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right]=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}e^{xt}dt, $$

тенглик ўринли бўлади.

2-лемма. Агар $\gamma>\beta>0$, $|x|<1$ бўлса, у ҳолда

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right]=\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}dt $$

тенглик ўринли бўлади [3].

Дривер ва Жонстон [4], кейинчалик умумлашган гипергеометрик функцияларнинг бир синфи учун қуйидаги интеграл кўринишини топишган:

3-лемма. Агар $\gamma > \beta > 0,\quad m \geq 1$, $|x| < 1$ бўлса, у ҳолда

$$ {}_{m+1}F_m\left[\begin{matrix} \alpha, \dfrac{\beta}{m}, \dfrac{\beta+1}{m}, ..., \dfrac{\beta+m-1}{m} \\ \dfrac{\gamma}{m}, \dfrac{\gamma+1}{m}, ..., \dfrac{\gamma+m-1}{m} \end{matrix}; x\right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt^m)^{-\alpha}dt, $$

тенглик ўринли бўлади.

Шунга ўхшаш далиллардан фойдаланиб, [5] Ҳабибуллоҳ ва Мубин ишида умумлашган гипергеометрик функциянинг қулай интеграл кўриниши аниқланган .

4-лемма. Агар $\gamma > \beta > 0$, $m \geq 1$ бўлса, у ҳолда

$$ {}_mF_m\left[\begin{matrix} \dfrac{\beta}{m}, \dfrac{\beta+1}{m}, ..., \dfrac{\beta+m-1}{m} \\ \dfrac{\gamma}{m}, \dfrac{\gamma+1}{m}, ..., \dfrac{\gamma+m-1}{m} \end{matrix}; x\right] = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}e^{xt^m}dt, $$

тенглик ўринли бўлади.

Ушбу бўлимда биз Лежандр мултипликатив формуласидан фойдаланиб, умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини аниқлаймиз. Бундан ташқари, биз бу интеграл кўриниши аралаш гипергеометрик функциялар бўйича баъзи натижаларни олиш учун ишлатамиз. Лежандрнинг мултипликатив формуласи $[1]$ ушбу кўринишга эга

$$ \prod_{s=1}^m \Gamma\left(\alpha + \frac{s-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2}-m\alpha}\Gamma(m\alpha). \tag{1} $$

Бу формула қуйида келтирилган умумлашган гипергеометрик функцияларнинг интеграл кўринишини олиш учун ишлатилди:

1-теорема. Агар $c > b > 0$, $|x| < 1$ бўлса, у ҳолда

$$ {}_3F_2\left(a, b, b+\frac{1}{2}; c, c+\frac{1}{2}; x\right) = \frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\int_0^1 t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-1}(1-xt^2)^{-a}dt. \tag{2} $$

Исбот. Айтайлик $|x| < 1$ бўлсин.

$$ {}_3F_2\left(a, b, b+\frac{1}{2}; c, c+\frac{1}{2}; x\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j\left(b+\frac{1}{2}\right)_j}{(c)_j\left(c+\frac{1}{2}\right)_j}\frac{x^j}{y!} = $$

$$ = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j\Gamma(b+j)\Gamma\left(b+j+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(c+j)\Gamma\left(c+j+\frac{1}{2}\right)}\frac{x^j}{j!} $$

бу ерда $(a)_j = \dfrac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}$.

Энди биз (1) формуладан фойдаланамиз ва қуйидаги ифодаларни оламиз.

$$ {}_3F_2\left(a, b, b+\frac{1}{2}; c, c+\frac{1}{2}; x\right) = $$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j\Gamma(2b+2j)\Gamma(2c-2b)}{\Gamma(2c+2j)}\frac{x^j}{y!}=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\sum_{j=0}^{\infty}(a)_j\left(\int_0^1 t^{2b-2j-1}(1-t)^{2c-2b-1}dt\right)\frac{x^j}{j!}=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\int_0^1 t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(a)_j\frac{(xt^2)^j}{j!}\right)dt=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\int_0^1 t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-1}(1-xt^2)^{-a}dt\,.$$

2-теорема. Агар $c>b>0$, $a>0$, $c>\frac{1}{2}a$, бўлса, у ҳолда

$${}_3F_2\left(a,b,b+\frac{1}{2};c,c+\frac{1}{2};1\right)=\frac{\Gamma(2c)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a)\Gamma(2c-2b)}\,{}_2F_1\left(a,2b;2c-a;-1\right)$$

Исбот. (2) формулага $x=1$ ни қўйиб, қуйидаги ифодаларни оламиз:

$${}_3F_2\left(a,b,b+\frac{1}{2};c,c+\frac{1}{2};1\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\int_0^1 t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-1}(1-t^2)^{-a}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\int_0^1 t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-a-1}(1+t)^{-a}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\int_0^1 t^{2b-1}(1-t)^{2c-2b-a-1}\sum_{j_1}^{\infty}\binom{-a}{j_1}t^{j_1}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\sum_{j_1=0}^{\infty}\binom{-a}{j_1}\int_0^1 t^{2b+j_1-1}(1-t)^{2c-2b-a-1}dt=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)}{\Gamma(2b)\Gamma(2c-2b)}\sum_{j_1=0}^{\infty}\binom{-a}{j_1}\frac{\Gamma(2b+j_1)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a+j_1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a)\Gamma(2c-2b)}\sum_{j_1=0}^{\infty}\frac{(a)_{j_1}(2b)_{j_1}}{(2c-a)_{j_1}}\frac{(-1)^{j_1}}{j_1!}=$$

$$=\frac{\Gamma(2c)\Gamma(2c-2b-a)}{\Gamma(2c-a)\Gamma(2c-2b)}\,{}_2F_1(a,2b;2c-a;-1).$$

1-хулоса. Агар $c>b>0$, $c>\frac{1}{2}n$ бўлса, у ҳолда

$${}_3F_2\left(-n,b,b+\frac{1}{2};c,c+\frac{1}{2};1\right)=\frac{(2c-2b)_n}{(2c)_n}\,{}_2F_1(-n,2b;2c+n;-1).$$

3-теорема. Агар $c>b>0$, $|x|<1$ бўлса, у ҳолда

$${}_4F_3\left(a,b,b+\frac{1}{3},b+\frac{2}{3};c,c+\frac{1}{3},c+\frac{2}{3};x\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)}\int_0^1 t^{3b-1}(1-t)^{3c-3b-1}(1-xt^3)^{-a}\,dt.$$

Исбот. Айтайлик $|x|<1$ бўлсин.

$${}_4F_3\left(a,b,b+\frac{1}{3},b+\frac{2}{3};c,c+\frac{1}{3},c+\frac{2}{3};x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j\left(b+\frac{1}{3}\right)_j\left(b+\frac{2}{3}\right)_j}{(c)_j\left(c+\frac{1}{3}\right)_j\left(c+\frac{2}{3}\right)_j}\frac{x^j}{j!}=$$

$$=\frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(c+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(b)\Gamma\left(b+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(b+\frac{2}{3}\right)}\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j\Gamma(b+j)\Gamma\left(b+j+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(b+j+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(c+j)\Gamma\left(c+j+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(c+j+\frac{2}{3}\right)}\frac{x^j}{j!}$$

бу ерда $(\alpha)_j=\dfrac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)}$.

Энди биз (1) формуладан фойдаланамиз ва қуйидаги ифодаларни оламиз.

$${}_4F_3\left(a,b,b+\frac{1}{3},b+\frac{2}{3};c,c+\frac{1}{3},c+\frac{2}{3};x\right)=$$

$$=\frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j\Gamma(3b+3j)\Gamma(3c-3b)}{\Gamma(3c+3j)}\frac{x^j}{j!}=$$

$$=\frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)}\sum_{j=0}^{\infty}(a)_j\left(\int_0^1 t^{3b+3j-1}(1-t)^{3c-3b-1}dt\right)\frac{x^j}{j!}=$$

$$=\frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)}\int_0^1 t^{3b-1}(1-t)^{3c-3b-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(a)_j\frac{(xt^3)^j}{j!}\right)dt=$$

$$=\frac{\Gamma(3c)}{\Gamma(3b)\Gamma(3c-3b)}\int_0^1 t^{3b-1}(1-t)^{3c-3b-1}(1-xt^3)^{-a}dt.$$

Адабиётлар:

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. –Т.1,2.–М.: Наука, 1973.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.Ф., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.3. Специальные функции. 2-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012.
4. Driver K.A. and Johnston S. J. (2006). An integral representation of some hypergeometric functions. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. Vol. 25, pp.
5. Habibullah G.M. and Mubeen S. (2011). L^p -Bounded operators involving generalized hypergeometric functions. *Integral Transforms and Special Functions*. Vol. 22, pp.

(Тақризчи: А.Қ.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).