ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2020

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

УДК: 51

АЛМАШТИРИШ ОПЕРАТОРЛАРИНИ ҚУРИШНИНГ КОМПОЗИЦИОН УСУЛИ ҲАҚИДА

О КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ON THE COMPOSITIONAL METHOD FOR CONSTRUCTING TRANSMUTATION OPERATORS

Ў.Омонова[1]

[1] **Ў.Омонова** – *ФарДУ математика йўналиши 2-курс магистранти*

Аннотация

Мақолада Бессел функцияси қатнашган оператор билан Риман – Лиувиллнинг каср тартибли интеграл операторининг бир нечта композициясини ўрганиш натижасида ядросида икки ўзгарувчили гипергеометрик функция қатнашган алмаштириш оператори ҳосил қилинган.

Аннотация

В данной статье исследована композиция оператора с функцией Бесселя в ядре с дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля. В результате получен оператор преобразования с гипергеометрической функцией с двумя переменными в ядре.

Annotation

In this article, we study the composition of an operator with a Bessel function in the kernel with a fractional Riemann-Liouville integral operator. As a result, we get a transmutation operator with a hypergeometric function with two variables in the kernel.

Таянч сўз ва иборалар: *алмаштириш оператори, композицион усул, Бессел функцияси, Риман–Лиувиллнинг каср тартибли интеграл оператори.*

Ключевые слова и выражения: *оператор преобразования, композиционный метод, функция Бесселя, интегральный оператор Римана-Лиувилля дробного порядка.*

Keywords and expressions: *the transmutations operator, the composition method, the Bessel function, the Riemann-Liouville fractional integral operator.*

Айтайлик, (A,B) операторлар жуфти берилган бўлсин. Агар

$$TA = BT \tag{1}$$

муносабат бажарилса, T оператор алмаштириш оператори деб аталади [1,351].

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида алмаштириш оператори усуллари сингуляр ва бузиладиган тенгламалар учун масалаларни ўрганиш, уларнинг аниқ ечимларини қуриш, спектрал масалалар ва псевдодифференциал операторларни ўрганиш ҳамда бошқа кўп масалаларни ўрганишда қўлланилади. Шу сабабли янги алмаштириш операторларини қуриш долзарб масала ҳисобланади. Ушбу ишда ядросида $J_\nu(z)$ кўринишидаги Бессел функцияси қатнашган қуйидаги

$$J_\lambda^1 f(x) = f(x) - \lambda\int_0^x \frac{J_1\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)}{\sqrt{x^2-t^2}} tf(t)dt =$$

$$= \int_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right) f'(t)dt, \qquad f(0)=0 \tag{2}$$

оператор билан Риман –Лиувиллнинг [2,стр.44]

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \qquad x>a,\ \alpha>0 \tag{3}$$

каср тартибли интеграл оператори композициясини ўрганиш натижасида ядросида икки ўзгарувчили гипергеометрик функция қатнашган алмаштириш операторини ҳосил қиламиз.

1-теорема. $J_\lambda^2(\alpha)=I_{0+}^\alpha J_\lambda^1$ композицияни қарайлик. f функция учун $J_\lambda^1(\alpha)f\in I_{0+}^2(L_1)$, $\operatorname{Re}\alpha>1$ шарт бажарилса, у ҳолда $J_\lambda^2(\alpha)$ оператор учун $J_\lambda^2(\alpha)D^2f=(D^2+\lambda^2)J_\lambda^2(\alpha)f$ тенглик ўринли ва (1) тенгликка асосан бу оператор алмаштириш оператори бўлади ҳамда уни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$J_\lambda^2(\alpha)f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x\left(\frac{x^2-s^2}{2x}\right)^\alpha\times$$
$$\times\Xi_2\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+1;1-\frac{s^2}{x^2},\frac{\lambda^2}{4}(s^2-x^2)\right)Df(s)\,ds\ , \qquad (4)$$

бу ерда $I_{a+}^\alpha(L_p),\ \operatorname{Re}\alpha>0$ - $f=I_{a+}^\alpha\varphi,\ \varphi\in L_p(a,b),\ 1\le p<\infty$ каср тартибли интеграл кўринишида ифодаланадиган жамланувчи $f(x)$ функциялар синфи, $\Xi_2(a,b;c;x,y)$ - Гумбертнинг икки ўзгарувчили гипергеометрик функцияси. У қуйидаги қатор ёрдамида аниқланади:

$$\Xi_2(a,b;c;x,y)=\sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty\frac{(a)_k(b)_k\,x^ky^n}{(c)_{k+n}\,k!n!}\ ,\qquad |x|<1,\quad |y|<+\infty\,.$$

Исбот. $J_\lambda^2(\alpha)$ операторнинг алмаштириш оператори бўлиши J_λ^1 операторнинг шу хоссага эгалиги ҳамда I_{0+}^α ва $D^k,\ k=0,1,...$ операторларнинг коммутативлигидан келиб чиқади [3,688]. Биз бу операторнинг интеграл кўринишини исботлаймиз. Бунинг учун ушбу композицияни қараймиз:

$$\left(I_{0+}^\alpha J_\lambda^1 f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\int_0^t J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)Df(s)\,dsdt=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x Df(s)\int_s^x\frac{J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}dtds\ , \qquad (5)$$

бу ерда интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкин, чунки интеграл остидаги функция узлуксиз ва интеграллаш оралиғи чегараланган.

Ички интегрални ҳисоблаймиз. Биз Бессел функциясининг қаторга ёйилмасидан фойдаланамиз (у текис яқинлашувчи) ва уни ҳадма-ҳад интеграллаймиз:

$$\int_s^x\frac{J_0\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m}}{m!m!}\int_s^x(x-t)^{\alpha-1}(t^2-s^2)^m\,dt=$$

$$\left\{\begin{matrix} y=\dfrac{t-s}{x-s}, & t=(x-s)y+s \\ dt=(x-s)dy & \end{matrix}\right\}$$

$$=\left(x-s\right)^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda^{2}}{2}\left(x-s\right)s\right)^{m}}{m!m!}\int_{0}^{1}\left(1-y\right)^{\alpha-1}y^{m}\left(1+\frac{x-s}{2s}y\right)^{m}dy=$$

$$=\left(x-s\right)^{\alpha}\varGamma\left(\alpha\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda^{2}}{2}\left(x-s\right)s\right)^{m}}{m!\Gamma\left(\alpha+m+1\right)}{}_{2}F_{1}\left(-m,m+1;\alpha+m+1;\frac{s-x}{2s}\right)=$$

$$=\varGamma\left(\alpha\right)\left(\frac{x^{2}-s^{2}}{2x}\right)^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda^{2}}{4}\left(x^{2}-s^{2}\right)\right)^{m}}{m!\Gamma\left(\alpha+m+1\right)}{}_{2}F_{1}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+m+1;\frac{x^{2}-s^{2}}{x^{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x^{2}-s^{2}}{2x}\right)^{\alpha}\Xi_{2}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+1;1-\frac{s^{2}}{x^{2}},\frac{\lambda^{2}}{4}\left(s^{2}-x^{2}\right)\right).$$

(5) даги охирги тенгликни алмаштириб теорема исботини оламиз.

2-теорема. Ушбу $J_{\lambda}^{3}\left(\alpha\right)=J_{\lambda}^{1}I_{0+}^{\alpha}=I_{0+}^{-\alpha}J_{\lambda}^{2}\left(\alpha\right)I_{0+}^{\alpha}$ композицияни қараймиз. f функция учун $f\in I_{0+}^{1}\left(L_{1}\right)$, $\operatorname{Re}\alpha>1$ шарт бажарилса $J_{\lambda}^{3}\left(\alpha\right)$ оператор (1) тенгликка асосан $J_{\lambda}^{3}\left(\alpha\right)D^{2}f=\left(D^{2}+\lambda^{2}\right)J_{\lambda}^{3}\left(\alpha\right)f$ алмаштириш оператори бўлади ва уни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$J_{\lambda}^{3}\left(\alpha\right)f\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_{0}^{x}\left(\frac{x^{2}-s^{2}}{2s}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\Xi_{2}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+1;1-\frac{x^{2}}{s^{2}},\frac{\lambda^{2}}{4}\left(s^{2}-x^{2}\right)\right)Df\left(s\right)ds\ . \qquad (6)$$

Исбот. Теоремани исботлаш тартиби аввалги теорема исботига ўхшайди. Биз ҳисоб-китобларнинг асосий босқичларини берамиз:

$$J_{\lambda}^{1}I_{0+}^{\alpha}=\int_{0}^{x}J_{0}\left(\lambda\sqrt{x^{2}-t^{2}}\right)DI_{0+}^{\alpha}f\left(t\right)dt=$$

$$=\int_{0}^{x}J_{0}\left(\lambda\sqrt{x^{2}-t^{2}}\right)I_{0+}^{\alpha}Df\left(t\right)dt=\frac{1}{\varGamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{x}Df\left(s\right)\int_{s}^{x}J_{0}\left(\lambda\sqrt{x^{2}-t^{2}}\right)\left(t-s\right)^{\alpha-1}dtds,$$

$$\int_{s}^{x}J_{0}\left(\lambda\sqrt{x^{2}-t^{2}}\right)\left(t-s\right)^{\alpha-1}dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{m}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m}}{m!m!}\left(x-s\right)^{m+\alpha}\left(2x\right)^{m}\int_{0}^{1}\left(1-y\right)^{\alpha-1}y^{m}\left(1-y\frac{x-s}{2x}\right)^{m}dy=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda^2}{2}(x-s)x\right)^m}{m!m!}(x-s)^{\alpha}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+m+1)}\,{}_2F_1\left(-m,m+1;\alpha+m+1;-\frac{x-s}{2x}\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2-s^2}{2s}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}\Xi_2\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2};\alpha+1;1-\frac{x^2}{s^2},\frac{\lambda^2}{4}\left(s^2-x^2\right)\right).$$

Теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Carroll R. Transmutation theory and applications. North – Holland, 1985.
2. Ситник С.М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана – Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт / Институт автоматики и процессов управления ДВО АН СССР. — Владивосток, 1990.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка, некоторые их изменения. —Минск., 1987.

(Тақризчи: А.Қ.Ўринов — физика-математика фанлари доктори, профессор).