ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2018
декабрь

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.927

МАВҲУМ АРГУМЕНТЛИ БЕССЕЛЬ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

М.Абдуманнопов

Аннотация

Мақолада мавҳум аргументли Бессель функцияси қатнашган ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ўрганилган.

Аннотация

В данной статье изучена задача с интегральным условием для интегро-дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом, содержащей функцию Бесселя с мнимым аргументом.

Annotation

In the article a problem with integral condition for integro differential equation with constant coefficient of Bessel's function which includes imaginary argument is studied.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл шартли масала, интеграл тенглама.*

Ключевые слова и выражения: *обыкновенное дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, задача с интегральным условием, интегральное уравнение.*

Keywords and expressions: *ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, problem with integral condition, integral equation.*

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)\,I_0[\lambda(x-t)]\,dt=f(x),\qquad x\in(0,1),\tag{1}$$

бу ерда $\alpha,\beta,\gamma,\lambda$ -берилган хақиқий сонлар, $I_0(x)$ - мавҳум аргументли Бессель функцияси [1], $f(x)$ -берилган функция.

Масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва

$$y(0)=k_1,\qquad \int_0^1 y(x)dx=k_2\tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_1,k_2\in R$.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1-лемма. *Агар $y(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,*

$$\int_0^1 y(x)dx=0\tag{3}$$

тенгликни қаноатлантирса, $[0,1]$ сегментда шундай ξ сон топиладики, $y(\xi)=0$ тенглик ўринли бўлади.

Бу леммани исботлаш қийинчилик туғдирмайди.

2-лемма. *Агар $\beta\le 0,\ \gamma\le 0,\ 0\le|\lambda|\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ бўлса,*

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)\,I_0[\lambda(x-t)]\,dt=0,\ x\in(0,x_0);\tag{4}$$

$$y(0)=0,\qquad y(x_0)=0\tag{5}$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

М.Абдуманнопов – *ФарДУ магистранти.*

Исбот. (4) тенгликни $e^{-2|\lambda|x}y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $\left[0,x_0\right]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}\left[y'(x)\right]^2 dx-\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}\left[2\lambda^2+\alpha|\lambda|+\beta\right]y^2(x)dx-$$

$$-\gamma\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)dx\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0\ . \tag{6}$$

(6) тенгликдаги учинчи интегрални l билан белгилайлик:

$$l=\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)I_0\left[\lambda(x-t)\right]dt\cdot$$

Бу ерда $I_0\left[\lambda(x-t)\right]$ функцияни

$$I_0\left[\lambda(x-t)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [1]:

$$l=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]dt\cdot$$

Бу тенгликни $2chx=e^x+e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\sum_{m=1}^{2}\int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)}\frac{d}{dx}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx \tag{7}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\mu_m(\xi)=|\lambda|\left(1+(-1)^m\xi\right),\qquad \Phi_m(x,\xi)=\int_0^x y(t)e^{(-1)^m|\lambda|\xi t}dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиб ва $\mu_m(\xi)\ge 0$ тенгсизликни эътиборга олиб, (7) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2}d\xi\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{2}\left\{e^{-2x_0\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x_0,\xi)+2\mu_m(\xi)\int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx\right\}\ge 0.$$

У ҳолда $\gamma\le 0$ эканлигини эътиборга олсак, (6) тенгликдаги охирги ҳаднинг манфий эмаслиги келиб чиқади. $\beta\le 0$ ва $0\le|\lambda|\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ шартларга асосан $2\lambda^2+\alpha\left|\lambda\right|+\beta$ квадрат учҳад мусбат эмас. Шунинг учун (6) тенгликдаги иккинчи қўшилувчи ҳам манфий эмас. Буни ва $l\ge 0$ тенгсизликни эътиборга олсак, (6) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,\ x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,x_0\right]$. 2-лемма исботланди.

1-теорема. *Агар 2-лемманинг шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин, деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(0,1) \tag{8}$$

$$y(0)=0,\qquad \int_0^1 y(x)dx=0 \tag{9}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(9) тенгликларнинг иккинчиси ва 1-леммага асосан шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(8),(9)} масалани қарасак, 2-леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак {(8),(9)} масаладан

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(x_0,1); \tag{10}$$

$$y(0)=0,\qquad \int_{x_0}^1 y(x)\,dx=0 \tag{11}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(10),(11)} тенгликларга юқоридаги усул билан 1- ва 2- леммаларни қўллансак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x_1)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (10) ва (11) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\gamma\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0,\quad x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0,\qquad \int_{x_1}^1 y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 1- ва 2-леммани қўлланамиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x)\equiv 0,$ деган хулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 2-лемма шартлари ва $f(x)\in C[0,1]$ шарт бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x)=f_1(x),\ x\in(0,1) \tag{12}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x)=f(x)-\alpha y'(x)-\beta y(x)-\gamma\int_0^x y(t)I_0\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (12) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)f_1(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{13}$$

тенглик ўринли бўлади [2], бу ерда

$$G(x,t)=\begin{cases} x(t-1), & x\le t; \\ (x-1)t, & x\ge t. \end{cases}$$

(13) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_1(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва γ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \qquad (14)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t)=\alpha[G(x,t)]'_t-G(x,t)\left[\beta+\gamma\int_t^1 I_0[\lambda(\xi-t)]dt\right].$$

(14) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 dx\int_0^1 f(t)G(x,t)dt-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (14) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt=F_1(x),\ x\in[0,1] \qquad (15)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_1(x,t)=M(x,t)-2x\int_0^1 M(z,t)dz.$$

$$F_1(x)=k_1(1-2x)+2k_2x+\int_0^1 f(t)\left\{G(x,t)-2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt.$$

(15)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [3], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади [3].

(15) интеграл тенгламанинг ечими $M_1(x,t)$ ядро резольвентаси $R_1(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F_1(x)+\int_0^1 R_1(x,t)F_1(t)dt,\ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. -Фарғона, 2012.
2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. –Т.: MUMTOZ SO'Z, 2014.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –T.: Yangiyul polygraph service, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика математика фанлари доктори, профессор).