

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

---

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.  
ILMIY  
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади  
Йилда 6 марта чиқади

6-2018  
Декабрь

**НАУЧНЫЙ  
ВЕСТНИК.  
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года  
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

|   |    |
|---|----|
| <b>А.ЎРИНОВ, А.СОТВОЛДИЕВ</b><br>Параболо - гиперболик типдаги модель тенглама учун учинчи чегаравий шартли нолокал масала .....                              | 5  |
| <b>Э.МАДРАҲИМОВ, М.МИРЗАКАРИМОВА</b><br>Математик статистика таҳлил қилиш усулининг бир масаласага татбиғи .....  | 11 |
| <b>Д.ОРИПОВ</b><br>Қаср тартибли бир оддий дифференциал тенглама учун локал ва нолокал масалалар .....  | 17 |
| <b>М.АБДУМАННОПОВ</b><br>Мавҳум аргументли бессель функцияси қатнашган ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ..... | 21 |

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

|   |    |
|---|----|
| <b>Р.Х.МАКСУДОВ, А.ДЖУРАЕВ, Ш.ШУХРАТОВ</b><br>Пахта тозалаш агрегатининг аррачали барабан секцияси конструкциясини ишлаб чиқиш .....  | 25 |
| <b>М.НАБИЕВ, К.ГАЙНАЗАРОВА, Я.УСМОНОВ, И.ЮЛДОШЕВА</b><br>Сезгир элементлардаги термоэлектрик тармоқлар сифатида қўлланиладиган <i>n-PbTe</i> пардалар баъзи хоссаларининг экспериментал тадқиғи ва уларни тузатиш ..... | 32 |

КИМЁ

|   |    |
|---|----|
| <b>А.ИБРАГИМОВ, А.ИБРОХИМОВ</b><br><i>Nitragia</i> индолли алкалоидлар ва уларнинг сунъий аналоглари физиологик фаоллигининг кимёвий структурага боғлиқлиги ..... | 36 |
|---|----|

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

|   |    |
|---|----|
| <b>Р.КУЗИЕВ, Г.ЮЛДАШЕВ</b><br>Ўзбекистоннинг баланд тоғли тупроқлари қоплами .....                      | 39 |
| <b>М.ИСАҒАЛИЕВ, Х.АБДУХАКИМОВА, М.ОБИДОВ</b><br>Суғориладиган ўтлоқи саз тупроқлар геокимёси .....      | 43 |
| <b>В.ИСАҚОВ, У.МИРЗАЕВ</b><br>Арзиқ-шухли ўтлоқи саз тупроқларнинг суғориш таъсиридаги динамикаси ..... | 47 |

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

|  |    |
|--|----|
| <b>А.ҒОФУРОВ, Г.ХОЛМАТЖОНОВА</b><br>Даромадлар ва аҳолининг банкдаги пул жамғармалардан манфаатдорлигини ошириш муаммолари ..... | 51 |
|--|----|

ТАРИХ

|   |    |
|---|----|
| <b>Т.ЭГАМБЕРДИЕВА, И.СИДДИҚОВ, А.НИШОНОВ</b><br>Диний бағрикенгликни таъминлаш борасида Ўзбекистон ва ЮНЕСКО ҳамкорлиги ..... | 55 |
| <b>Ж.ҲАЙИТОВ</b><br>Туркистонда манзарали дарахтлар янги турларининг тарқалиш тарихи (XIX аср охири - XX аср бошлари) .....   | 61 |
| <b>Н.РЕЖАББОЕВ</b><br>Фарғона очларига ёрдам (1923-1924 йиллар) .....   | 64 |
| <b>З.РАХМАНОВ, М.ХОМИДЖОНОВА</b><br>Қадимги Фарғонанинг маданиятларини даврлаштириш борасида айрим фикр-мулоҳазалар .....     | 69 |

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

|   |    |
|---|----|
| <b>Б.ГАНИЕВ, С.ЭВАТОВ, М.НЕЪМАТОВА</b><br>Имом Бухорий ҳадисларидаги ахлоқ-одоб қоидаларининг тадбиркорлик маданиятига алоқадорлиги ..... | 74 |
| <b>А.КОМИЛОВ</b><br>Ёшлар турмуш маданиятини юксалтиришда таълим-тарбиянинг ўрни .....  | 77 |

АДАБИЁТШУНОСЛИК

|  |    |
|--|----|
| <b>С.ХЎЖАЕВ</b><br>“Панчатантра” эпоси ва ўзбек адабиёти ..... | 80 |
|--|----|

**МАВҲУМ АРГУМЕНТЛИ БЕССЕЛЬ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎЗГАРМАС  
КОЭФФИЦИЕНТЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ  
МАСАЛА**

**М.Абдуманнопов**

**Аннотация**

Мақолада мавҳум аргументли Бессель функцияси қатнашган ўзгармас коэффицентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ўрганилган.

**Аннотация**

В данной статье изучена задача с интегральным условием для интегро-дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом, содержащей функцию Бесселя с мнимым аргументом.

**Annotation**

In the article a problem with integral condition for integro differential equation with constant coefficient of Bessel's function which includes imaginary argument is studied.

**Таянч сўз ва иборалар:** оддий дифференциал тенглама, интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл шартли масала, интеграл тенглама.

**Ключевые слова и выражения:** обыкновенное дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, задача с интегральным условием, интегральное уравнение.

**Keywords and expressions:** ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, problem with integral condition, integral equation.

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

бу ерда  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  - берилган хақиқий сонлар,  $I_0(x)$  - мавҳум аргументли Бессель функцияси [1],  $f(x)$  - берилган функция.

**Масала.** (1) тенгламанинг  $[0,1]$  сегментда аниқланган, узлуксиз ва

$$y(0) = k_1, \quad \int_0^1 y(x) dx = k_2 \quad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда  $k_1, k_2 \in R$ .

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текшираамиз.

**1-лемма.** Агар  $y(x)$  функция  $[0,1]$  сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\int_0^1 y(x) dx = 0 \quad (3)$$

тенгликни қаноатлантирса,  $[0,1]$  сегментда шундай  $\xi$  сон топиладики,  $y(\xi) = 0$  тенглик ўринли бўлади.

Бу леммани исботлаш қийинчилик туғдирмайди.

**2-лемма.** Агар  $\beta \leq 0, \gamma \leq 0, 0 \leq |\lambda| \leq (1/4)[\sqrt{\alpha^2 - 8\beta} - \alpha]$  бўлса,

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_0) = 0 \quad (5)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

М.Абдуманнопов – ФарДУ магистранти.

**Исбот.** (4) тенгликни  $e^{-2|\lambda|x} y(x)$  функцияга кўпайтирамиз ва  $x$  бўйича  $[0, x_0]$  сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги  $y''(x)$  ва  $y'(x)$  ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} [y'(x)]^2 dx - \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} [2\lambda^2 + \alpha|\lambda| + \beta] y^2(x) dx - \gamma \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} y(x) dx \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0. \quad (6)$$

(6) тенгликдаги учинчи интегрални  $l$  билан белгилайлик:

$$l = \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} y(x) dx \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt.$$

Бу ерда  $I_0[\lambda(x-t)]$  функцияни

$$I_0[\lambda(x-t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} ch[\lambda(x-t)\xi] d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [1]:

$$l = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} y(x) dx \int_0^x y(t) ch[\lambda(x-t)\xi] dt.$$

Бу тенгликни  $2chx = e^x + e^{-x}$  формуладан фойдаланиб,

$$l = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \sum_{m=1}^2 \int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)} \frac{d}{dx} \Phi_m^2(x, \xi) dx \quad (7)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\mu_m(\xi) = |\lambda| (1 + (-1)^m \xi), \quad \Phi_m(x, \xi) = \int_0^x y(t) e^{(-1)^m |\lambda| \xi t} dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиб ва  $\mu_m(\xi) \geq 0$  тенгсизликни эътиборга олиб, (7) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \times \left\{ \sum_{m=1}^2 \left[ e^{-2x_0\mu_m(\xi)} \Phi_m^2(x_0, \xi) + 2\mu_m(\xi) \int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)} \Phi_m^2(x, \xi) dx \right] \right\} \geq 0.$$

У ҳолда  $\gamma \leq 0$  эканлигини эътиборга олсак, (6) тенгликдаги охириги ҳаднинг манфий эмаслиги келиб чиқади.  $\beta \leq 0$  ва  $0 \leq |\lambda| \leq (1/4)[\sqrt{\alpha^2 - 8\beta} - \alpha]$  шартларга асосан  $2\lambda^2 + \alpha|\lambda| + \beta$  квадрат учҳад мусбат эмас. Шунинг учун (6) тенгликдаги иккинчи қўшилувчи ҳам манфий эмас. Буни ва  $l \geq 0$  тенгсизликни эътиборга олсак, (6) тенгликдан  $y'(x) \equiv 0$ , яъни  $y(x) = const$ ,  $x \in [0, x_0]$  деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (5) шартларга асосан  $y(x) \equiv 0$ ,  $x \in [0, x_0]$ . 2-лемма исботланди.

**1-теорема.** Агар 2-лемманинг шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

**Исбот.** Қўйилган масала  $y_1(x)$  ва  $y_2(x)$  ечимларга эга бўлсин, деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда  $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$  функция

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (0,1) \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 0 \quad (9)$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(9) тенгликларнинг иккинчиси ва 1-леммага асосан шундай  $x_0 \in (0,1)$  мавжудки,  $y(x_0) = 0$  тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(8),(9)} масалани қарасак, 2-леммага асосан  $y(x) \equiv 0, x \in [0, x_0]$  тенгликка эга бўламиз.

$y(x) \equiv 0, x \in [0, x_0]$  тенгликни эътиборга олсак {(8),(9)} масаладан

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (x_0, 1); \quad (10)$$

$$y(0) = 0, \quad \int_{x_0}^1 y(x) dx = 0 \quad (11)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(10),(11)} тенгликларга юқоридаги усул билан 1- ва 2- леммаларни қўллансак, шундай  $x_1 \in (x_0, 1)$  мавжудки,  $y(x_1) \equiv 0, x \in [x_0, x_1]$  тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (10) ва (11) тенгликлардан

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (x_1, 1);$$

$$y(x_1) = 0, \quad \int_{x_1}^1 y(x) dx = 0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 1- ва 2-леммани қўлланамиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараёни кетма-кет давом эттирсак, натижада  $[0,1]$  сегмент ичига жойлашган шундай  $[0, x_0], [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, x_{n+1}] \dots$  оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда  $y(x) \equiv 0$  бўлиб,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва  $y(x) \in C[0,1]$  эканлигини эътиборга олсак,  $y(x) \equiv 0$ , деган хулосага эга бўламиз. Демак,  $y(x) \equiv 0, x \in [0,1]$ . Унда  $y_1(x) \equiv y_2(x), x \in [0,1]$ . 1-теорема исботланди.

**2-теорема.** Агар 2-лемма шартлари ва  $f(x) \in C[0,1]$  шарт бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд бўлади.

**Исбот.** (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x), \quad x \in (0,1) \quad (12)$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x) = f(x) - \alpha y'(x) - \beta y(x) - \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt.$$

Агар  $f_1(x)$  функцияни ва  $y(1)$  сонни маълум деб ҳисобласак, (12) тенгламанинг  $y(x)$  ечими учун

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 G(x,t) f_1(t) dt, \quad x \in [0,1] \quad (13)$$

тенглик ўринли бўлади [2], бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & x \leq t; \\ (x-1)t, & x \geq t. \end{cases}$$

(13) тенгликда  $y(0)$  ўрнига  $k_1$  ни ва  $f_1(x)$  функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда  $y'(t)$  иштирок этган интегрални бўлақлаймиз ва  $\gamma$  иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x) = k_1(1-x) + y(1)x + \int_0^1 f(t)G(x,t)dt + \int_0^1 M(x,t)y(t)dt, \quad x \in [0,1] \quad (14)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t) = \alpha[G(x,t)]'_t - G(x,t) \left[ \beta + \gamma \int_t^1 I_0[\lambda(\xi-t)]d\xi \right].$$

(14) тенгликни  $x$  бўйича  $[0,1]$  ораликда интеграллаб, (2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак,  $y(1)$  номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1) = 2k_2 - k_1 - 2 \int_0^1 dx \int_0^1 f(t)G(x,t)dt - 2 \int_0^1 y(t) \left[ \int_0^1 M(x,t)dx \right] dt.$$

$y(1)$  нинг бу ифодасини (14) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x) - \int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt = F_1(x), \quad x \in [0,1] \quad (15)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_1(x,t) = M(x,t) - 2x \int_0^1 M(z,t)dz.$$

$$F_1(x) = k_1(1-2x) + 2k_2x + \int_0^1 f(t) \left\{ G(x,t) - 2x \int_0^1 G(x,t)dz \right\} dt.$$

(15)-  $y(x)$  номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [3], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади [3].

(15) интеграл тенгламанинг ечими  $M_1(x,t)$  ядро резольвентаси  $R_1(x,t)$  ёрдамида

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^1 R_1(x,t)F_1(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки,  $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ . 2-теорема исботланди.

#### Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. -Фарғона, 2012.
2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. -Т.: MUMTOZ SO'Z, 2014.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. -Т.: Yangiyul polygraph service, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика математика фанлари доктори, профессор).