

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2018
Декабрь

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

А.ЎРИНОВ, А.СОТВОЛДИЕВ
Параболо - гиперболик типдаги модель тенглама учун учинчи чегаравий шартли нолокал масала5

Э.МАДРАҲИМОВ, М.МИРЗАКАРИМОВА
Математик статистика таҳлил қилиш усулининг бир масаласага татбиғи11

Д.ОРИПОВ
Қаср тартибли бир оддий дифференциал тенглама учун локал ва нолокал масалалар17

М.АБДУМАННОПОВ
Мавҳум аргументли бессель функцияси қатнашган ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала21

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

Р.Х.МАКСУДОВ, А.ДЖУРАЕВ, Ш.ШУХРАТОВ
Пахта тозалаш агрегатининг аррачали барабан секцияси конструкциясини ишлаб чиқиш25

М.НАБИЕВ, К.ГАЙНАЗАРОВА, Я.УСМОНОВ, И.ЮЛДОШЕВА
Сезгир элементлардаги термоэлектрик тармоқлар сифатида қўлланиладиган *n-PbTe* пардалар баъзи хоссаларининг экспериментал тадқиғи ва уларни тузатиш32

КИМЁ

А.ИБРАГИМОВ, А.ИБРОХИМОВ
Nitragia индолли алкалоидлар ва уларнинг сунъий аналоглари физиологик фаоллигининг кимёвий структурага боғлиқлиги36

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Р.КУЗИЕВ, Г.ЮЛДАШЕВ
Ўзбекистоннинг баланд тоғли тупроқлари қоплами39

М.ИСАҒАЛИЕВ, Х.АБДУХАКИМОВА, М.ОБИДОВ
Суғориладиган ўтлоқи саз тупроқлар геокимёси43

В.ИСАҚОВ, У.МИРЗАЕВ
Арзиқ-шухли ўтлоқи саз тупроқларнинг суғориш таъсиридаги динамикаси47

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

А.ҒОФУРОВ, Г.ХОЛМАТЖОНОВА
Даромадлар ва аҳолининг банкдаги пул жамғармалардан манфаатдорлигини ошириш муаммолари51

ТАРИХ

Т.ЭГАМБЕРДИЕВА, И.СИДДИҚОВ, А.НИШОНОВ
Диний бағрикенгликни таъминлаш борасида Ўзбекистон ва ЮНЕСКО ҳамкорлиги55

Ж.ҲАЙИТОВ
Туркистонда манзарали дарахтлар янги турларининг тарқалиш тарихи (XIX аср охири - XX аср бошлари)61

Н.РЕЖАББОЕВ
Фарғона очларига ёрдам (1923-1924 йиллар)64

З.РАХМАНОВ, М.ХОМИДЖОНОВА
Қадимги Фарғонанинг маданиятларини даврлаштириш борасида айрим фикр-мулоҳазалар69

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

Б.ГАНИЕВ, С.ЭВАТОВ, М.НЕЪМАТОВА
Имом Бухорий ҳадисларидаги ахлоқ-одоб қоидаларининг тадбиркорлик маданиятига алоқадорлиги74

А.КОМИЛОВ
Ёшлар турмуш маданиятини юксалтиришда таълим-тарбиянинг ўрни77

АДАБИЁТШУНОСЛИК

С.ХЎЖАЕВ
“Панчатантра” эпоси ва ўзбек адабиёти80

**МАВҲУМ АРГУМЕНТЛИ БЕССЕЛЬ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎЗГАРМАС
КОЭФФИЦИЕНТЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ
МАСАЛА**

М.Абдуманнопов

Аннотация

Мақолада мавҳум аргументли Бессель функцияси қатнашган ўзгармас коэффицентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ўрганилган.

Аннотация

В данной статье изучена задача с интегральным условием для интегро-дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом, содержащей функцию Бесселя с мнимым аргументом.

Annotation

In the article a problem with integral condition for integro differential equation with constant coefficient of Bessel's function which includes imaginary argument is studied.

Таянч сўз ва иборалар: оддий дифференциал тенглама, интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл шартли масала, интеграл тенглама.

Ключевые слова и выражения: обыкновенное дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, задача с интегральным условием, интегральное уравнение.

Keywords and expressions: ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, problem with integral condition, integral equation.

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

бу ерда $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ - берилган хақиқий сонлар, $I_0(x)$ - мавҳум аргументли Бессель функцияси [1], $f(x)$ - берилган функция.

Масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва

$$y(0) = k_1, \quad \int_0^1 y(x) dx = k_2 \quad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_1, k_2 \in R$.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текшираамиз.

1-лемма. Агар $y(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\int_0^1 y(x) dx = 0 \quad (3)$$

тенгликни қаноатлантирса, $[0,1]$ сегментда шундай ξ сон топиладики, $y(\xi) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

Бу леммани исботлаш қийинчилик туғдирмайди.

2-лемма. Агар $\beta \leq 0, \gamma \leq 0, 0 \leq |\lambda| \leq (1/4)[\sqrt{\alpha^2 - 8\beta} - \alpha]$ бўлса,

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (4)$$

$$y(0) = 0, \quad y(x_0) = 0 \quad (5)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

М.Абдуманнопов – ФарДУ магистранти.

Исбот. (4) тенгликни $e^{-2|\lambda|x} y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $[0, x_0]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} [y'(x)]^2 dx - \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} [2\lambda^2 + \alpha|\lambda| + \beta] y^2(x) dx - \gamma \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} y(x) dx \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0. \quad (6)$$

(6) тенгликдаги учинчи интегрални l билан белгилайлик:

$$l = \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} y(x) dx \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt.$$

Бу ерда $I_0[\lambda(x-t)]$ функцияни

$$I_0[\lambda(x-t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} ch[\lambda(x-t)\xi] d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [1]:

$$l = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x} y(x) dx \int_0^x y(t) ch[\lambda(x-t)\xi] dt.$$

Бу тенгликни $2chx = e^x + e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \sum_{m=1}^2 \int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)} \frac{d}{dx} \Phi_m^2(x, \xi) dx \quad (7)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\mu_m(\xi) = |\lambda| (1 + (-1)^m \xi), \quad \Phi_m(x, \xi) = \int_0^x y(t) e^{(-1)^m |\lambda| \xi t} dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиб ва $\mu_m(\xi) \geq 0$ тенгсизликни эътиборга олиб, (7) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \times \left\{ e^{-2x_0\mu_m(\xi)} \Phi_m^2(x_0, \xi) + 2\mu_m(\xi) \int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)} \Phi_m^2(x, \xi) dx \right\} \geq 0.$$

У ҳолда $\gamma \leq 0$ эканлигини эътиборга олсак, (6) тенгликдаги охириги ҳаднинг манфий эмаслиги келиб чиқади. $\beta \leq 0$ ва $0 \leq |\lambda| \leq (1/4)[\sqrt{\alpha^2 - 8\beta} - \alpha]$ шартларга асосан $2\lambda^2 + \alpha|\lambda| + \beta$ квадрат учҳад мусбат эмас. Шунинг учун (6) тенгликдаги иккинчи қўшилувчи ҳам манфий эмас. Буни ва $l \geq 0$ тенгсизликни эътиборга олсак, (6) тенгликдан $y'(x) \equiv 0$, яъни $y(x) = const$, $x \in [0, x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (5) шартларга асосан $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, x_0]$. 2-лемма исботланди.

1-теорема. Агар 2-лемманинг шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин, деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (0,1) \quad (8)$$

$$y(0) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 0 \quad (9)$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(9) тенгликларнинг иккинчиси ва 1-леммага асосан шундай $x_0 \in (0,1)$ мавжудки, $y(x_0) = 0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(8),(9)} масалани қарасак, 2-леммага асосан $y(x) \equiv 0, x \in [0, x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x) \equiv 0, x \in [0, x_0]$ тенгликни эътиборга олсак {(8),(9)} масаладан

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (x_0, 1); \quad (10)$$

$$y(0) = 0, \quad \int_{x_0}^1 y(x) dx = 0 \quad (11)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(10),(11)} тенгликларга юқоридаги усул билан 1- ва 2- леммаларни қўллансак, шундай $x_1 \in (x_0, 1)$ мавжудки, $y(x_1) \equiv 0, x \in [x_0, x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (10) ва (11) тенгликлардан

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (x_1, 1);$$

$$y(x_1) = 0, \quad \int_{x_1}^1 y(x) dx = 0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 1- ва 2-леммани қўлланамиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараёни кетма-кет давом эттирсак, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0, x_0], [x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, x_{n+1}] \dots$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x) \equiv 0$ бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x) \in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x) \equiv 0$, деган хулосага эга бўламиз. Демак, $y(x) \equiv 0, x \in [0,1]$. Унда $y_1(x) \equiv y_2(x), x \in [0,1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. Агар 2-лемма шартлари ва $f(x) \in C[0,1]$ шарт бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд бўлади.

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x), \quad x \in (0,1) \quad (12)$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x) = f(x) - \alpha y'(x) - \beta y(x) - \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)] dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (12) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 G(x,t) f_1(t) dt, \quad x \in [0,1] \quad (13)$$

тенглик ўринли бўлади [2], бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & x \leq t; \\ (x-1)t, & x \geq t. \end{cases}$$

(13) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_1(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлақлаймиз ва γ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x) = k_1(1-x) + y(1)x + \int_0^1 f(t)G(x,t)dt + \int_0^1 M(x,t)y(t)dt, \quad x \in [0,1] \quad (14)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t) = \alpha[G(x,t)]'_t - G(x,t) \left[\beta + \gamma \int_t^1 I_0[\lambda(\xi-t)]d\xi \right].$$

(14) тенгликни x бўйича $[0,1]$ ораликда интеграллаб, (2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1) = 2k_2 - k_1 - 2 \int_0^1 dx \int_0^1 f(t)G(x,t)dt - 2 \int_0^1 y(t) \left[\int_0^1 M(x,t)dx \right] dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (14) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x) - \int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt = F_1(x), \quad x \in [0,1] \quad (15)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_1(x,t) = M(x,t) - 2x \int_0^1 M(z,t)dz.$$

$$F_1(x) = k_1(1-2x) + 2k_2x + \int_0^1 f(t) \left\{ G(x,t) - 2x \int_0^1 G(x,t)dz \right\} dt.$$

(15)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [3], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади [3].

(15) интеграл тенгламанинг ечими $M_1(x,t)$ ядро резольвентаси $R_1(x,t)$ ёрдамида

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^1 R_1(x,t)F_1(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. -Фарғона, 2012.
2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. -Т.: MUMTOZ SO'Z, 2014.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. -Т.: Yangiyul polygraph service, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика математика фанлари доктори, профессор).