ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2018
декабрь

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

АДАБИЁТШУНОСЛИК

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.9+517.948.3

КАСР ТАРТИБЛИ БИР ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ЛОКАЛ ВА НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

Д.Орипов

Аннотация

Мақолада каср тартибли бир оддий дифференциал тенглама учун икки нуқтали ва интеграл шартли чегаравий масалалар қўйилган ва уларнинг ечимлари ошкор кўринишда топилган.

Аннотация

В статье Поставлены краевые задачи с двухточечными и интегральными условиями для одного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, найдены решения поставленных задач в явном виде.

Annotation

In the article boundary-value problems with two-points and integral conditions for a ordinary differential equation of fractional order are set and solutions of these problems are found explicitly.

Таянч сўз ва иборалар: *каср тартибли ҳосила, каср тартибли оддий дифференциал тенглама, чегаравий масала, интеграл тенглама, Миттаг-Леффлер функцияси.*

Ключевые слова и выражения: *производная дробного порядка, обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка, краевая задача, интегральное уравнение, функция Миттаг-Леффлера.*

Keywords and expressions: *derivative of fractional order, ordinary differential equation of fractional order, boundary-value problem, integral equation, Mittag-Leffler's function.*

I. Кириш

Агар тенгламада бир ўзгарувчан номаълум функциянинг фақат каср тартибли ҳосилалари қатнашса, бундай тенглама каср тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ўхшаш каср тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун ҳам Коши ва чегаравий масалаларни ўрганиш мумкин[1,2]. Бундай тенгламалар ва уларга қўйилган масалалар ҳақидаги маълумотларни А.М.Нахушевнинг “Дробное исчисление и его применение” номли китобидан топиш мумкин. Хусусан, А.А. Килбаснинг “Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка” номли маърузалар курсида [2] Риман-Луивилл маъносидаги каср тартибли ҳосила қатнашган ушбу

$$D_{ax}^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad a < x < b, \ \alpha > 0, \ \lambda \in R \tag{1}$$

чизиқли дифференциал тенглама учун

$$\left[D_{ax}^{\alpha-k} y(x) \right]_{x=a} = b_k, \quad b_k \in R, \ k = 1,2,...,n, \quad n = [\alpha] + 1 \tag{2}$$

шартлар билан Коши типидаги масалалар ўрганилган.

Агар $f(x) \in C_{\gamma}[a,b] \ (0 \le \gamma < 1)$, бу ерда $C_{\gamma}[a,b] = \left\{ y(x) : (x-a)^{\gamma} y(x) \in C[a,b] \right\}$

функциялар синфида аниқланган бўлса, {(1),(2)} Коши масаласи бир қийматли ечилади ва бу ечим қуйидаги

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{3}$$

2-тур Вольтерра интеграл тенгламасининг ечими сифатида аниқланади.

Кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланиб, (3) интеграл тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишда топилган:

Д.Орипов – *ФарДУ математика йўналиши магистранти.*

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i(x-a)^{\alpha i+\alpha-j}}{\Gamma(\alpha i+\alpha-j+1)}+\int_a^x\left[\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}(x-t)^{\alpha j+\alpha-1}\right]f(t)\,dt=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j(x-a)^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left[\lambda(x-a)^{\alpha}\right]+\int_a^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt. \tag{4}$$

Бу ерда $E_{\alpha,\beta}(z)$ - Миттаг-Леффлер функцияси бўлиб,

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

кўринишда аниқланади.

II. Масаланинг қўйилиши

1-масала.

$$D_{0x}^{\alpha}y(x)-\lambda y(x)=f(x),\quad \alpha\in(1,2),\ x\in(0,1),\ \lambda\in R \tag{5}$$

тенгламанинг

$$\lim_{x\to0}\left[x^{2-\alpha}y(x)\right]=k_0, \tag{6}$$

$$y(1)=k_1 \tag{7}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

(5) тенгламанинг умумий ечими [2] га асосан

$$y(x)=\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt+C_1x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)+C_2x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \tag{8}$$

формула билан берилади.

(8) ечим формуласини (6) шартга бўйсундирамиз:

$$\lim_{x\to0}\left\{x^{2-\alpha}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt+C_1x^{2-\alpha}\cdot x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)+C_2x^{2-\alpha}\cdot x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda x^{\alpha}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{x^{2-\alpha}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt+C_1x\cdot E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)+C_2E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda x^{\alpha}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{C_1x\cdot\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{\lambda x^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha)}+\frac{\lambda^2x^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha)}+\ldots\right)+C_2\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}+\frac{\lambda x^{\alpha}}{\Gamma(2\alpha-1)}+\frac{\lambda^2x^{2\alpha}}{\Gamma(3\alpha-1)}+\ldots\right)+\right.$$
$$\left.+x^{2-\alpha}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt\right\}=C_2\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}=k_0,$$

$$C_2=k_0\Gamma(\alpha-1). \tag{9}$$

(7) ва (8) тенгликлардан қуйидаги натижани ҳосил қиламиз:

$$y(1)=\left\{C_1x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}\right)+C_2x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda x^{\alpha}\right)+\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt\right\}_{x=1}=$$

$$=C_1E_{\alpha,\alpha}(\lambda)+C_2E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda)+\left\{\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}\right]f(t)\,dt\right\}_{x=1}=k_1.$$

$C_2=k_0\Gamma(\alpha-1)$ ва $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)\neq0$ эканлигидан фойдаланиб, охирги тенгликдан C_1 ни бир қийматли топамиз:

$$C_1=\left\{k_1-k_0\Gamma(\alpha-1)E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda)-\left[\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha-1}\right]f(t)dt\right]_{x=1}\right\}\times$$

$$\times\left[E_{\alpha,\alpha}(\lambda)\right]^{-1}. \qquad (10)$$

1-теорема. $1<\alpha<2,\ 0\le\gamma<1$ ва $\lambda\in R$ бўлсин. Агар $f(x)\in C_\lambda[0,1]$ бўлса, {(5),(6),(7)} чегаравий масаланинг $y(x)\in C_{2-\alpha}^{\alpha}[0,1]$ ечими (8) формула билан бир қийматли аниқланади, бу ерда C_1 ва C_2 лар (9) ва (10) формулалар билан топилади.

Шунга ўхшаш қуйидаги масалани ҳам ўрганиш мумкин:

2-масала. (5) тенгламанинг $C_{2-\alpha}^{\alpha}[0,1]$ функциялар синфида аниқланган ва

$$a_1\lim_{x\to 0}\left[x^{2-\alpha}y(x)\right]+b_1\lim_{x\to 0}\left[x^{1-\alpha}y(x)\right]=k_1,$$

$$a_2y(1)+b_2y'(1)=k_2$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ ечими топилсин, бу ерда a_1,a_2,b_1,b_2,k_1,k_2- берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a_1^2+b_1^2\ne 0$ ва $a_2^2+b_2^2\ne 0$, $f(x)\in C_\gamma[0,1]$.

Юқоридаги масалаларда каср тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун локал шартли масалалар, яъни икки нуқтали чегаравий масалаларни ўргандик. Энди (5) тенглама учун нолокал шартли масалалардан бир тури бўлган интеграл шартли масалаларни ўрганамиз.

3-масала. (5) тенгламанинг (6) ва

$$y(1)=\int_a^b y(t)dt+k_1 \qquad (11)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_0,k_1,a,b-$берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $0\le a<b\le 1$.

Фараз қилайлик, $f(x)\equiv 0$ бўлсин. У ҳолда (5) тенгламанинг умумий ечими (8) га асосан

$$y(x)=C_1x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda x^\alpha\right)+C_2x^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda x^\alpha\right) \qquad (12)$$

формула билан топилади.

(12) функцияни (6) шартга қўйиб, (9) тенгликка эга бўламиз.

Энди (12) ечим формуласини (11) шартга бўйсундирамиз. (7) ва (12) тенгликларга асосан

$$y(1)=C_1E_{\alpha,\alpha}(\lambda)+C_2E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda). \qquad (13)$$

(11) шартнинг иккинчи ярми учун қуйидаги натижаларни оламиз:

$$\int_a^b y(t)dt=C_1\int_a^b t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda t^\alpha\right)dt+C_2\int_a^b t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left(\lambda t^\alpha\right)dt=$$

$$=C_1\int_a^b t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}dt+C_2\int_a^b t^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}dt.$$

Соддалаштиришлардан сўнг,

$$\int_a^b y(t)dt=C_1\left[b^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j b^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha+1)}-a^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j a^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha+1)}\right]+$$

$$+C_2\left[b^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j b^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}-a^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j a^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\right]=$$

$$=C_1\left[b^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(\lambda b^{\alpha}\right)-a^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(\lambda a^{\alpha}\right)\right]+C_1\left[b^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda b^{\alpha}\right)-a^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda a^{\alpha}\right)\right] \quad (14)$$

ҳосил бўлади.

Топилган (13) ва (14) ларни (11) га қўямиз ва

$$C_1E_{\alpha,\alpha}(\lambda)+C_2E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda)=C_1\left[b^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(\lambda b^{\alpha}\right)-a^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(\lambda a^{\alpha}\right)\right]+$$
$$+C_2\left[b^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda b^{\alpha}\right)-a^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda a^{\alpha}\right)\right]+k_1$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ерда (9) тенгликни эътиборга олсак, C_1 бир қийматли аниқланади:

$$C_1=\frac{k_0\Gamma(\alpha-1)\left[b^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda b^{\alpha}\right)-a^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda a^{\alpha}\right)-E_{\alpha,\alpha-1}(\lambda)\right]}{E_{\alpha,\alpha}(\lambda)-b^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(\lambda b^{\alpha}\right)+a^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(\lambda a^{\alpha}\right)}. \quad (15)$$

2-теорема. $1<\alpha<2$, $0\le\gamma<1$ ва $\lambda\in R$ бўлсин. Агар $f(x)\equiv 0$ бўлса, {(5),(6),(11)} интеграл шартли масаланинг $y(x)\in C_{2-\alpha}^{\alpha}[0,1]$ ечими (12) формула билан бир қийматли аниқланади. Бу ерда C_1 ва C_2 лар (9) ва (15) формулалар билан топилади.

Юқоридаги масалани $f(x)\not\equiv 0$ бўлганда ҳам ўрганиш мумкин.

Шунга ўхшаш усул билан интеграл шартли масаланинг қуйидаги умумлашмасини хам ўрганиш мумкин:

4-масала. (5) тенгламанинг $C_{2-\alpha}^{\alpha}[0,1]$ функциялар синфида аниқланган ва

$$a_1\lim_{x\to 0}\left[x^{2-\alpha}y(x)\right]+b_1\lim_{x\to 0}\left[x^{1-\alpha}y(x)\right]=k_1, \quad (16)$$

$$y(1)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\int_{\alpha_n}^{\beta_n}y(x)dx+k_2 \quad (17)$$

шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ ечими топилсин, бу ерда $a_1,b_1,c_n,\alpha_n,\beta_n,k_1,k_2$ – берилган сонлар бўлиб, $a_1^2+b_1^2\neq 0,\ 0<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<...<\alpha_n<\beta_n<1,\quad n\in N.$

Адабиётлар:

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение . –М.: Физматлит, 2003.
2. Килбас А.А. Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка. –Самара, 2009.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).