ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2018
декабрь

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

АДАБИЁТШУНОСЛИК

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.956

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ МОДЕЛЬ ТЕНГЛАМА УЧУН УЧИНЧИ ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛИ НОЛОКАЛ МАСАЛА

А.Ўринов, А.Сотволдиев

Аннотация

Мақолада парабола-гиперболик типдаги содда тенглама учун бир нолокал масала ўрганилган. Бунда соҳанинг параболик қисмида учинчи чегаравий шарт, гиперболик қисмида эса силжишли шарт берилган. Қўйилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Аннотация

В статье изучена одна нелокальная задача для моделного параболо-гиперболического уравнения. При этом в параболической части области взято третье краевое условие, а в гиперболической части- условие со смещением. Доказано существование и единственность решения поставленной задачи.

Annotation

In the article a nonlocal problem for a model of the parabolic hyberbolic type equation is studied. The third boundary-value condition in the parabolic part of the domain and shifting condition is given in the hyberbolic part of the domain. The uniqueness and existence of solution of the considered problem is proved.

Таянч сўз ва иборалар: *парабола-гиперболик типдаги тенглама, ечимнинг мавжудлиги, ечимнинг ягоналиги, учинчи чегаравий шарт, силжишли шарт.*

Ключевые слова и выражения: *уравнения параболо-гиперболического типа, существование решения, единственность решения, третье краевое условие, условие со смещением.*

Keywords and expressions: *parabolic hyperbolic type equation, existence of solution, uniqueness of solution, third boundary-value condition, shifting condition.*

Ω билан xOt текислигининг $x+t=0$, $x-t=l$, $x=0$, $x=l$, $t=T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган чекли соҳасини белгилайлик, бу ерда $l=const>0$, $T=const>0$. Яна қуйидаги белгилашларни киритайлик: $\Omega_1=\left[\Omega\cap(t>0)\right]\cup AE,\quad \Omega_2=\Omega\cap(t<0)$, $AE=\{(x,T):0<x<l\}$, $OA=\{(0,t):0<t<T\}$, $OB=\{(x,0):0<x<l\}$, $BE=\{(l,t):0<t<T\}$, $OM=\{(x,t):t=-x,0<x<(l/2)\}$, $BM=\{(x,t):t=x-l,(l/2)<x<l\}$.

Ω соҳада

$$u_{xx}-\frac{1}{2}(1-\operatorname{sgn}t)u_{tt}-\frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn}t)u_t=0 \tag{1}$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда мос равишда

$$u_{xx}-u_t=0, \tag{F}$$

$$u_{xx}-u_{tt}=0 \tag{D}$$

кўринишларни олиб, параболик ва гиперболик типга тегишли бўлади. Шунинг учун (1) тенглама Ω соҳада аралаш тенглама, яъни параболо-гиперболик тенглама бўлиб, OB кесма унинг тип ўзгариш чизиғидир. Бу тенгламанинг харакеристикалари Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда мос равишда $t=C_0$ ва $x\pm t=C_1$ чизиқлардан иборат бўлиб, тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи, яъни OB кесма характеристика ҳам бўлади.

(1) тенглама учун Ω соҳада қуйидаги масалани ўрганамиз:

1-нолокал Масала. *Шундай* $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega_1)\cap C^2(\Omega_2)$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда (1) тенгламани,* OB *тип ўзгариш чизиғида*

$$\lim_{t\to-0}u(x,t)=\lim_{t\to+0}u(x,t),\ 0<x<l \tag{2}$$

А.Ўринов – *ФарДУ, физика-математика фанлари доктори, профессор.*
А.Сотволдиев – *НамДУ магистранти.*

улаш шартини, соҳа чегарасида эса

$$u_x(0,t)+\alpha u(0,t)=\psi_1(t),\ \ 0<t\le T; \qquad (3)$$

$$u_x(l,t)+\beta u(l,t)=\psi_2(t),\ 0<t\le T; \qquad (4)$$

$$a(x)u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+b(x)u\left(\frac{x+l}{2},\frac{x-l}{2}\right)+c(x)u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le l \qquad (5)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)\ne 0$, $x\in[0,l]$, $\alpha,\beta\in R,\alpha\beta\ne 0$.

(5)- нолокал шарт бўлиб, у номаълум $u(x,t)$ функциянинг $\overline{OM}$, $\overline{BM}$ ва $\overline{OB}$ кесмалардаги қийматларини боғламоқда.

Қуйидаги шартлар бажарилган деб ҳисоблаб, масаланинг бир қийматли ечилишини тадқиқ қиламиз:

$$a(x),\ b(x),\ c(x)\in C^2[0,l]; \qquad (6)$$

$$a(l)=0,\ b(0)=0,\ a(0)+c(0)\ne 0, b(l)+c(l)\ne 0; \qquad (7)$$

$$a(x)+b(x)+2c(x)\ne 0,\ x\in[0,l]; \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{b(x)}{a(x)+b(x)+2c(x)}\right]\ge 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a(x)}{a(x)+b(x)+2c(x)}\right]\le 0,\ 0\le x\le l; \qquad (9)$$

$$a(x)-b(x)\ne 0,\ x\in[0,l]. \qquad (10)$$

Масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини ўрганамиз. Масаланинг $u(x,t)$ ечими мавжуд бўлсин.

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=\tau(x), 0\le x\le l;\quad u_t(x,0)=\nu(x),\ 0<x<l; \\ \tau(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l),\ \ \nu(x)\in C(0,l)\cap L[0,l] \end{array}\right\} \qquad (11)$$

белгилашларни ва фаразларни қабул қилайлик.

У ҳолда $u(x,t)$ функцияни Ω_2 соҳада

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+t)+\tau(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\nu(\xi)d\xi \qquad (12)$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлади.

(12) функцияни (5) шартга бўйсундириш мақсадида қуйидаги ҳисоблашларни бажарамиз:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left[\tau(0)+\tau(x)\right]+\frac{1}{2}\int_x^0\nu(\xi)d\xi, \\ u\left(\frac{x+l}{2},\frac{x-l}{2}\right)&=\frac{1}{2}\left[\tau(x)+\tau(l)\right]+\frac{1}{2}\int_l^x\nu(\xi)d\xi. \end{aligned} \qquad (13)$$

Бу тенгликларни эътиборга олсак, (5) шартдан

$$\left[a(x)+b(x)+2c(x)\right]\tau(x)=f(x)-a(x)\tau(0)-b(x)\tau(l)+$$

$$+a(x)\int_0^x \nu(\xi)d\xi + b(x)\int_x^l \nu(\xi)d\xi\,,\ \ x\in[0,l]$$

тенглик келиб чиқади. (8) шартни эътиборга олиб, бу тенгликни $a(x)+b(x)+2c(x)=e(x)$ ифодага бўламиз. Сўнгра

$$f_1(x)=\frac{f(x)}{e(x)},\ a_1(x)=\frac{a(x)}{e(x)},\ b_1(x)=\frac{b(x)}{e(x)}$$

белгилашларни киритсак, $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ номаълум функциялар орасидаги Ω_2 соҳадан олинган *асосий муносабатга* эга бўламиз:

$$\tau(x)=2f_1(x)-a_1(x)\tau(0)-b_1(x)\tau(l)+$$
$$+a_1(x)\int_0^x \nu(\xi)d\xi + b_1(x)\int_x^l \nu(\xi)d\xi\,,\ \ x\in[0,l]. \tag{14}$$

Бу тенгликда $x=0$ ва $x=l$ деб, (7) шартларни ҳисобга олсак, $\tau(0)$ ва $\tau(l)$ номаълум сонлар бир қийматли топилади:

$$\tau(0)=\left\{c(0)/\left[a(0)+c(0)\right]\right\},\tau(l)=\left\{c(l)/\left[b(l)+c(l)\right]\right\}. \tag{15}$$

Энди (1) тенгламада t ни нолга интилтирсак, (11) белгилашларга асосан

$$\tau''(x)-\nu(x)=0\,,\ x\in(0,l) \tag{16}$$

тенглик келиб чиқади.

Натижада, номаълум $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларга нисбатан $\{(14),(15),(16)\}$ масалага эга бўламиз.

$\{(14),(15),(16)\}$ масаланинг бир қийматли ечилишини текширайлик. Дастлаб бу масала ечимининг ягоналигини текширамиз. Фараз қилайлик, $\{(14),(15),(16)\}$ масала $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ ва $\tau_2(x)$, $\nu_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$, $\nu(x)=\nu_1(x)-\nu_2(x)$ функциялар (16) ва

$$\tau(0)=0\,,\quad \tau(l)=0\,, \tag{17}$$

$$\tau(x)=a_1(x)\int_0^x \nu(\xi)d\xi + b_1(x)\int_x^1 \nu(\xi)d\xi\,,\quad x\in[0,l] \tag{18}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(16), (17) ва (18) тенгликлар ёрдамида

$$J=\int_0^l \tau(x)\nu(x)dx$$

интегралнинг ишорасини текширайлик.

(16) тенгликдан $\nu(x)$ функцияни топиб ва J интегралга қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган интегрални бўлакласак ва (17) тенгликларни инобатга олсак,

$$J=\int_0^l \tau(x)\nu(x)dx=-\int_0^l\left[\tau'(x)\right]^2 dx\le 0 \tag{19}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Энди $\tau(x)$ функциянинг (18) ифодасини J интегралга қўямиз ва ҳосил бўлган ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{a_1(x)\frac{d}{dx}\left[\int_0^x\nu(\xi)d\xi\right]^2-b_1(x)\frac{d}{dx}\left[\int_x^l\nu(\xi)d\xi\right]^2\right\}dx.$$

Бу интегрални бўлаклаб, сўнгра (7) шартларни ҳисобга олсак,

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{b_1'(x)\left[\int_x^l\nu(\xi)d\xi\right]^2-a_1'(x)\left[\int_0^x\nu(\xi)d\xi\right]^2\right\}dx$$

тенглик келиб чиқади. (9) шарт бажарилганда $a_1^{'}(x)\le 0$, $b_1^{'}(x)\ge 0$, $x\in[0,l]$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Буларни инобатга олсак, охирги тенгликдан $J\ge 0$ эканлигини топамиз. Бундан ва (19) тенгсизликдан келиб чиқадики, $J=0$. У ҳолда J нинг (19) кўринишига кўра $\tau'(x)\equiv 0$, яъни $\tau(x)\equiv const$, $x\in[0,l]$. Унда (17) тенгликларга асосан $\tau(x)\equiv 0$, $x\in[0,l]$. Буни (16) тенгликка қўйсак, $\nu(x)\equiv 0$, $x\in[0,l]$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\tau_1(x)\equiv\tau_2(x)$, $\nu_1(x)\equiv\nu_2(x)$, $x\in[0,l]$, яъни, агар $\{(14),(15),(16)\}$ масала ечимга эга бўлса, у ягонадир.

Изоҳ. Бу тасдиқни исботлашда $\int_0^l\left[\tau'(x)\right]^2dx$ интегрални мавжуд ва чекли, яъни $\tau'(x)\in L_2[0,1]$ деб ҳисобладик. Буни инобатга олсак, (14) тенгликдан $\nu(x)\in L_2[0,1]$ бўлиши келиб чикади. Демак, ечиминиг ягоналиги ҳақидаги юқоридаги тасдиқ $\tau'(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар $L_2[0,l]$ синфга тегишли бўлганда, ўринли бўлади.

Энди $\{(14),(15),(16)\}$ масала ечимининг мавжудлигини текширамиз. Шу мақсадда (16) тенгликда x ни z билан алмаштириб, ҳосил бўлган тенгликни z бўйича $[0,x]$ оралиқда икки марта интеграллаймиз:

$$\tau(x)=\int_0^x(x-z)\nu(z)dz+C_1x+C_0$$

Бу функцияни (15) шартларга қўйиб, C_0 ва C_1 сонларни топамиз:

$$C_0=\tau(0),\ C_1=\frac{1}{l}\left[\tau(l)-\tau(0)-\int_0^l(l-z)\nu(z)dz\right].$$

Буларни эътиборга олсак, $\tau(x)$ функция қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\tau(x)=\int_0^x(x-z)\nu(z)dz-\frac{x}{l}\int_0^l(l-z)\nu(z)dz+$$
$$+\tau(0)+(x/l)\left[\tau(l)-\tau(0)\right],\ x\in[0,l].$$

$\tau(x)$ функциянинг бу ифодасини (14) тенгликка қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликни бир марта дифференциаллаб ва (10) шартни инобатга олиб, $\nu(x)$ номаълум функцияга нисбатан қуйидаги кўринишдаги

$$\nu(x)+\int_0^l \nu(z)K(x,z)dz=f_2(x),\ \ x\in[0,l] \qquad (20)$$

иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда

$$f_2(x)=\left\{a_1'(x)\tau(0)+b_1'(x)\tau(l)-2f_1'(x)+\left[\tau(l)-\tau(0)\right]l^{-1}\right\}\left[a_1(x)-b_1(x)\right]^{-1},$$

$$K(x,z)=\begin{cases}\left[a_1(x)-b_1(x)\right]^{-1}\left[a_1'(x)-zl^{-1}\right], & x\ge z;\\ \left[a_1(x)-b_1(x)\right]^{-1}\left[b_1'(x)+1-zl^{-1}\right], & x\le z.\end{cases}$$

(20) интеграл тенглама $\{(14),(15),(16)\}$ масалага эквивалент бўлиб, унга мос бир жинсли тенглама $\{(16),(17),(18)\}$ бир жинсли масалага мос келади. Охирги масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (20) га мос бир жинсли интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан бир жинслимас (20) интеграл тенглама ягона ечимга эга бўлади.

(6) шартлар ва $f_2(x)$, $K(x,z)$ функцияларнинг тузилишига асосан (20) интеграл тенгламанинг ечими $C^1[0,l]$ синфга тегишли бўлади.

(20) интеграл тенгламадан топилган $\nu(x)\in C^1[0,l]$ функцияни (14) тенгликка қўйиб, $\tau(x)\in C^2[0,l]$ функцияни топамиз.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди:

1-теорема. *Агар (6)-(10) шартлар бажарилса,* $\{(14),(15),(16)\}$ *масала ягона ечимга эга бўлади.*

$\{(14),(15),(16)\}$ масаладан топилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларни (12) формулага қўйиб, 1- нолокал масаланинг ечимини Ω_2 соҳада топамиз.

Масаланинг ечими Ω_1 соҳада (F) тенгламага (3), (4) ва $u(x,0)=\tau(x)$, $0\le x\le l$ шартлар билан қўйилган чегаравий масаланинг ечими сифатида топилади. Уни (F) тенглама учун қўйилган иккинчи чегаравий масаланинг ечими кўринишида қидирамиз:

$$u(x,t)=\int_0^l \tau(\xi)G_2(x,t;\xi,0)d\xi-$$

$$-\int_0^t \varphi_1(\eta)G_2(x,t;0,\eta)d\eta+\int_0^t \varphi_2(\eta)G_2(x,t;l,\eta)d\eta \qquad (21)$$

бу ерда $\varphi_1(t)=u_x(0,t)$, $\varphi_2(t)=u_x(l,t)$

$$G_2(x,t;\xi,\eta)=(1/2)\left[\pi(t-\eta)\right]^{-1/2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}\right]\right\}.$$

Бу формуладан $u(0,t)$ ва $u(l,t)$ ларни топамиз:

$$u(0,t)=\int_0^1 \tau(\xi)G_2(0,t;\xi,0)d\xi-\int_0^t \varphi_1(\eta)G_2(0,t;0,\eta)d\eta+\int_0^t \varphi_2(\eta)G_2(0,t;l,\eta)d\eta\,,$$

$$u(l,t)=\int_0^1 \tau(\xi)G_2(l,t;\xi,0)d\xi-\int_0^t \varphi_1(\eta)G_2(l,t;0,\eta)d\eta+\int_0^t \varphi_2(\eta)G_2(l,t;l,\eta)d\eta\,.$$

Буларни (3) ва (4) шартларга қўйиб, сўнгра $u_x(0,l)=\varphi_1(t),\, u_x(l,t)=\varphi_2(t)$ белгилашларни эътиборга олсак, $\varphi_1(t)$ ва $\varphi_2(t)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги интеграл тенгламалар системасига келамиз:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t)+\int_0^t \varphi_1(t)K_{11}(x,t)dt+\int_0^t \varphi_2(t)K_{12}(x,t)dt=f_3(t), \qquad 0<t\le T;\\ &\varphi_2(t)+\int_0^t \varphi_1(t)K_{22}(x,t)dt+\int_0^t \varphi_2(t)K_{12}(x,t)dt=f_4(t), \qquad 0<t\le T,\end{aligned} \tag{22}$$

бу ерда

$$f_3(t)=\psi_1(t)-\alpha\int_0^1 \tau(\xi)G_2(0,t;\xi,0)d\xi\,,$$

$$f_4(t)=\psi_2(t)-\beta\int_0^1 \tau(\xi)G_2(l,t;\xi,0)d\xi\,,$$

$$K_{11}(x,t)=-\alpha G_2(0,t;0,\eta), \qquad K_{12}(x,t)=\alpha G_2(0,t;l,\eta),$$

$$K_{21}(x,t)=-\beta G_2(l,t;0,\eta), \qquad K_{22}(x,t)=\beta G_2(l,t;l,\eta).$$

$G_2(x,t;\xi,\eta)$ функциянинг тузилишидан осонгина топиш мумкинки, $K_{12}(x,t)$ ва $K_{21}(x,t)$ узлуксиз функциялар, $K_{11}(x,t)$ ва $K_{22}(x,t)$ лар эса $1/2$ тартибли суст махсусликка эга бўлган функциялар.

Демак, (22), умумий ҳолда, суст махсусликка эга бўлган ядроли иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалар системасини ташкил қилар экан. Берилган функцияларга қўйилган шартларга асосан унинг ўнг томонлари узлуксиз функциялар бўлади.

У ҳолда иккичи тур Вольтерра интеграл тенгламалар назариясига асосан, (22) система ягона ечимга эга.

(22) системадан топилган $\varphi_1(t)$ ва $\varphi_2(t)$ ларни (21) формулага қўйиб, қўйилган масаланинг ечимини Ω_1 соҳада топамиз.

Масала тўла ҳал бўлди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Т.: Mumtoz so’z, 2015.
2. Ўринов А.Қ. Параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Т.: Наврўз, 2016.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. – T.: Yangiyul polygraph service, 2007.