ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК: 517.956.6

ПАРАБОЛО – ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ТРИКОМИ МАСАЛАСИ

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

TRICOMI PROBLEM FOR PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

А.Оқбоев [1], Н.Муталлиев [2]

[1] **А.Оқбоев** — *Фарғона давлат университети математик анализ ва дифференциал тенгламалар кафедраси докторанти (PhD).*

[2] **Н.Муталлиев** — *Наманган давлат университети математика йўналиши 2-курс магистранти.*

Аннотация

Мақолада аралаш типдаги параболо-гиперболик иккинчи тур тенглама учун Трикоми масаласи баён қилинган ва масаланинг бир қийматли ечими ўрганилган. Масаланинг ечими параболик соҳада биринчи чегаравий масала ечими сифатида, гиперболик соҳада эса кўриниши ўзгарган Коши масаланинг ечими сифатида изланган.

Аннотация

В статье исследуется задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа в смешанной области. Решение задачи в гиперболической подобласти находится как решение задачи Коши, а в параболической подобласти как решение первой краевой задачи.

Annotation

In this article, the Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic type equation in a mixed domain has been investigated. The solution of the problem in the hyperbolic sub-domain is found as a solution to the Cauchy problem, and in a parabolic subdomain as a solution to the first boundary value problem.

Таянч сўз ва иборалар: *параболо-гиперболик типдаги тенглама, аралаш соҳа, Трикоми масаласи, Коши масаласи, биринчи чегаравий масала.*

Ключевые слова и выражения: *уравнение параболо-гиперболического типа, смешанная область, задача Трикоми, задача Коши, первая краевая задача.*

Keywords and expressions: *parabolic-hyperbolic type equation, mixed domain, Tricomi problem, Cauchy problem, first boundary value problem.*

1. Масаланинг қўйилиши.

Ушбу

$$0=\begin{cases} L_1(u)\equiv u_{xx}+u_y, \quad y>0; \\ L_2(u)\equiv u_{xx}+yu_{yy}+\left(-n+1/2\right)u_y=0, \quad y<0 \end{cases} \tag{1}$$

тенгламани $D=D_1\bigcup D_2\cup AB$ соҳада қарайлик, бу ерда D_1 қуйидаги чизиқлар $AA_1: x=0$, $A_1B_1: y=1$, $BB_1: y=0$, $AB: y=0$ билан чегараланган соҳа, D_2 - (1) тенгламанинг характеристикалари $AB: y=0$, $AC: x-2\sqrt{-y}=0$, $BC: x+2\sqrt{-y}=1$ билан чегараланган соҳа, $n\in N$.

Таъкидлаш жоизки, гиперболик қисми $L_2(u)=0$ тенгламадан иборат бўлган эллиптико-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи [1,2] ишларда ўрганилган. [3] ишда эса ушбу тенглама учун Франкль масаласи ўрганилган. [4, 5, 6] ишларда гиперболик қисми

$$L_\alpha(u)\equiv u_{xx}+yu_{yy}+\alpha u_y=0$$

тенгламадан иборат бўлган аралаш типдаги эллиптико–гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи ўрганилган. [7] ишда гиперболик қисми $L_\alpha(u)=0$ тенгламадан иборат бўлган параболо–гиперболик типдаги тенглама учун Трикоми масаласи ўрганилган. Биз ушбу ишимизда юқорида санаб ўтилган ишларнинг мантиқий тўлдирувчиси сифатида қуйидаги масалани ўрганамиз.

Трикоми масаласи. Қуйидаги шартларни ва (1) тенгламани қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{D})$ функция топилсин:

$$u\big|_{AC}=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1/2, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\psi_0(y),\quad u(1,y)=\psi_1(y),\ \forall y\in[0,1], \tag{3}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{1/2-n}\left[u-A^{-}_{-n+1/2}(\tau)\right]'_y=\lim_{y\to+0}u(x,y),\ \forall x\in(0,1), \tag{4}$$

$$\varphi^{(k)}(0)=\psi_0^{(k)}(0)=0,\ k=\overline{0,..,2n} \tag{5}$$

бу ерда $\varphi(x),\psi_0(y),\ \psi_1(y)$ - берилган функциялар, $\tau(x)=u(x,0)$,

$$A^{-}_{-n+1/2}(\tau)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!2^{2k}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}\left(x-2\sqrt{-y}\right)+(-1)^k\tau^{(k)}\left(x+2\sqrt{-y}\right)\right].$$

2. **Асосий қисм.** (1) тенглама учун қўйилган

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1,$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{1/2-n}\left[u-A^{-}_{-n+1/2}(\tau)\right]'_y=\nu(x),\ 0<x<1$$

шартлардан иборат кўриниши ўзгарган Коши масаласининг ечими [1]

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!2^{2k-1}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}\left(x-2\sqrt{-y}\right)+(-1)^k\tau^{(k)}\left(x+2\sqrt{-y}\right)\right]+$$
$$-\frac{2(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}(-y)^{n+1/2}\int_0^1\nu\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right]\left[z(1-z)\right]^n dz \tag{6}$$

дан иборат. Трикоми масаласининг D_2 соҳадаги ечимини (6) функция сифатида қидирамиз. (6) функцияни (2) шартга бўйсундириб, $\tau(x)$ ва унинг ҳосилаларига нисбатан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!2^{k-1}x^k}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}(0)+(-1)^k\tau^{(k)}(2x)\right]+$$
$$-\frac{2(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+1/2}\int_0^1\nu(2xz)\left[z(1-z)\right]^n dz=\varphi(x),\ 0\le x\le 1/2. \tag{7}$$

(7) тенгламада x ни $x/2$ билан алмаштириб, $n+1$ марта ҳосила олиб, қуйидагига эга бўламиз [1]:

$$\tau^{(2n+1)}(x)=4^{2n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^2\nu(x)+\frac{(2n)!}{2^n n!}(-1)^n x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2),\ 0\le x\le 1. \quad (8)$$

(5) шартдан $\tau^{(k)}(0)=0, k=\overline{0,..2n}$ экани келиб чиқади. Буни эътиборга олган ҳолда (8) тенгламанинг ҳар иккала тамонига D_{0x}^{-1-2n} операторни қўллаб,

$$\tau(x)=-4^{2n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^2 D_{0x}^{-1-2n}\nu(x)+\frac{(2n)!}{2^n n!}(-1)^{n+1} D_{0x}^{-1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right],\ 0\le x\le 1 \quad (9)$$

$\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги биринчи муносабатни оламиз.

Энди D_1 соҳадан асосий функционал муносабатларни олиш мақсадида $L_1(u)=0$ тенгламадан ва (3) шартлардан $y\to+0$ да лимитга ўтамиз. Натижада,

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\ u(0,0)=\psi_0(0),\ \ u(1,0)=\psi_1(0) \quad (10)$$

муносабатларни оламиз. Демак, Трикоми масаласи, ечимга эга бўлиш маъносида, {(9), (10)} тенгламалар системасига эквивалент экан. Чунки агар бу системадан $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларни бир қийматли топсак, Трикоми масаласининг ечими D_2 соҳада (6) формула билан, D_1 соҳада эса $L_1 u=0$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими

$$u(x,y)=\int_0^1\tau(\xi)G(\xi,0;x,y)d\xi+\int_0^y\psi_0(\eta)G_\xi(0,\eta;x,y)d\eta-$$

$$-\int_0^y\psi_1(\eta)G_\xi(1,\eta;x,y)d\eta$$

сифатида топилади [9], бу ерда

$$G(\xi,\eta;x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\exp\frac{(x-\xi+2m)^2}{4(\eta-y)}-\exp\frac{(x+\xi+2m)^2}{4(\eta-y)}\right].$$

(9) муносабатдан икки марта ҳосила олиб (10) муносабатга қўйсак

$$\nu(x)-\lambda\int_0^x(x-t)^{2n-2}\nu(t)dt=\mu D_{0x}^{1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right],\ x\in[0,1] \quad (11)$$

$\nu(x)$ га нисбатан 2-тур Волтерра интеграл тенгламасини ҳосил қиламиз, бу ерда $\lambda=4^{2n-1/2}n(2n-1)(2n)!/(n!)^2$, $\mu=(-1)^{n+1}(2n)!n(2n-1)/(2^{n-1}n!)$.

1-теорема. Агар $x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)$ функция $[0,1]$ кесмада интеграллланувчи бўлса, (11) иккинчи тур Волтерра интеграл тенгламаси ягона

$$\nu(x)=\mu D_{0x}^{1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right]+\mu\int_0^x z\,E_{2n-1,2n-1}(z)D_{0t}^{1-2n}\left[t^{-n}\varphi^{(n+1)}(t/2)\right]dt \quad (12)$$

ечимга эга бўлади.

Исбот. Агар $x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)$ функция $[0,1]$ кесмада интегралланувчи бўлса, $D_{0x}^{1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right]\in C[0,1]$ бўлади. Бундан (11) тенглама ядроси ва ўнг тарафи узлуксиз бўлган иккинчи тур Волтерра интеграл тенгламаси эканлиги келиб чиқади. Интеграл тенгламалар назариясидан (11) тенглама ягона ечимга эга.

Ушбу тенгламани кетма-кет яқинлашиш усули билан ечамиз. Итеграцияланган ядроларни тузамиз:

$$K_1(x,t)=(x-t)^{2n-2},\ K_2(x,t)=\int_t^x (x-s)^{2n-2}(s-t)^{2n-2}\,ds=\frac{\left[(2n-1)!\right]^2}{(4n-2)!}(x-t)^{4n-3},$$

$$K_3(x,t)=\frac{\left[(2n-1)!\right]^2}{(4n-2)!}\int_t^x (x-s)^{2n-2}(s-t)^{4n-3}\,ds=\frac{\left[(2n-1)!\right]^3}{(6n-3)!}(x-t)^{6n-4}.$$

Умуман,

$$K_m(x,t)=\frac{\left[(2n-1)!\right]^m}{(2mn-m)!}(x-t)^{2mn-m-1}.$$

Энди $R(x,t;\lambda)$ резолвенани тузамиз:

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,t)=(2n-1)!(x-t)^{2n-2}E_{2n-1,2n-1}(z),$$

бу ерда, $z=\lambda(2n-1)!(x-t)^{2n-2}$, $E_{2n-1,2n-1}(z)$ -Миттаг-Леффлер функцияси [8]. Ҳосил қилинган резолвентадан фойдаланиб, (11) тенгламанинг ягона ечими (12) ни ёзиб оламиз.

1-теорема исбот бўлди.

$\nu(x)$ нинг (12) кўринишини (9) [ёки (10)] тенгламага қўйиб $\tau(x)$ ни бир қийматли топиб оламиз.

Шундай қилиб биз ушбу теоремани исботладик.

2-теорема. Агар $x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)$ функция $[0,1]$ кесмада интегралланувчи бўлиб, (5) шарт бажарилса, Трикоми масаласи ягона ечимга эга бўлади.

Адабиётлар:

1. Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. — Казань: Издательство Казанского университета, 1986.
2. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. — Казань: Издательство Казанского университета, 2015.
3. Хайруллин Р.С. Аналог задачи Франкля для уравнения второго рода, Изв.вузов. Матем., 2002, № 4.
4. Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. Сердика Бълг. Мат. списание. 1977. Т. 3. № 3.
5. Хайруллин Р. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области. Дифференц. уравнения, 1990, Т 26, № 8.
6. Salahitdinov M.S., Mamadaliev N.K. Tricomi problem for the elliptic-hyperbolic equation of the second kind // The Journal of the Korean Mathematical Society (JKMS). – 2011. – Vol. 19. – №. 2.
7. Mamadaliev N.K. Tricomi problem for strongly Degenarate Equations of Parabolic-Hyperbolic type. Mathematical Notss. – Curler Academic / Plenum-publishers. – 1999/2000. – Vol. 66. – № 3.
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
9. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. —Т.: Фан, 1986.

(Тақризчи: А.Қ.Ўринов — физика-математика фанлари доктори, профессор).