ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2018
апрель

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

УДК: 50+517.43

ВЕКУА-ЭРДЕЙ-ЛОУНДЕС ТИПИДАГИ ЯНГИ АЛМАШТИРИШ ОПЕРАТОРЛАРНИ ҚУРИШНИНГ БИР УСУЛИ ҲАҚИДА

Ш.Каримов Л.Рахимова

Аннотация

Мақолада ядросида Бессел оператори қатнашган Векуа-Эрдей-Лоундес типидаги алмаштириш оператори ва каср тартибли Риман-Лиувилль операторларининг композицияси ўрганилган. Ҳосил бўлган ядро Гумберт гипергеометрик функцияси қатнашган интеграл операторнинг алмаштириш оператори бўлиши кўрсатилган.

Аннотация

В данной работе изучена композиция оператора преобразования Векуа-Эрдей-Лоундеса с функцией Бесселя в ядре и оператора дробного порядка Римана-Лиувилля. В результате получен новый оператор преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Гумберта в ядре.

Annotation

In this article the composition of the transformation operator Vekua-Erdey-Loundes with Bessel function in the nucleus and the fractional order operator Reeman-Zuivill is studied. As a result a new prevention with a degenerated hypergeometric function Gumbert in the nucleus is recieved.

***Таянч сўз ва иборалар**: алмаштириш операторлари, Векуа-Эрдей-Лоундес алмаштириш оператори, каср тартиби, Риман-Лиувилль оператори.*

***Ключевые слова и выражения**: оператор преобразования, оператор преобразования Векуа-Эрдей-Лоундес, оператор дробного порядка Римана-Лиувилля.*

***Keywords and expressions**: transformation operator, transformation operator Vekua-Erdey-Loundes, fractional order operator Reeman-Zuivill.*

Айтайлик, (A, B) операторлар жуфти берилган бўлсин. Агар

$$TA = BT \tag{1}$$

муносабат бажарилса, T оператор алмаштириш оператори деб аталади [1].

Амалий ишларда A ва B – дифференциал, T – эса стандарт фазолардаги чизиқли интеграл оператор бўлади. Векуа-Эрдей-Лоундес типидаги алмаштириш оператори деб, ушбу

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T \tag{2}$$

муносабатни қаноатлантирувчи T операторга айтилади, бунда A бирор-бир оператор, λ_1 ва λ_2 эса комплекс сонлардир.

Одатда T чизиқли оператор бўлгани учун (2) муносабатни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин бўлади:

$$TA = (A + (\lambda_2 - \lambda_1))T\,,\ T(A + (\lambda_1 - \lambda_2)) = TA.$$

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясида алмаштириш оператори усуллари сингуляр ва бузиладиган тенгламалар учун масалаларни ўрганиш, уларнинг аниқ ечимларини қуриш, спектрал масалалар ва псевдодифференциал операторларни ўрганиш ҳамда бошқа кўп масалаларни ўрганишда қўлланилади. Шу сабабли янги алмаштириш операторларини қуриш долзарб масала ҳисобланади. Ушбу ишда ядросида $J_v(z)$ кўринишдаги Бессел функцияси қатнашган қуйидаги

$$J_\lambda^1 f(x) = J_\lambda f(x) = f(x) - \lambda \int_0^x \frac{J_1(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}}{\sqrt{x^2 - t^2}} t f(t)dt =$$
$$= \int_0^x J_0\left(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}\right) f^{'}(t)dt\,, \quad f(0) = 0 \tag{3}$$

оператор билан Риман-Лиувиллнинг [2]

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha - 1} f(t)dt, \ > a\,, \alpha > 0\,, \tag{4}$$

каср тартибли интеграл оператори композициясини ўрганиш натижасида ядросида икки

***Ш.Каримов** – ФарДУ, физика-математика фанлари номзоди, доцент.*
***Л.Рахимова** – ФарДУ математик анализ мутахассислиги 2-босқич магистранти.*

ўзгарувчили гипергеометрик функция қатнашган алмаштириш операторини ҳосил қиламиз.

1-теорема: $I_{0+}^{\alpha} J_1 = J_{\lambda}^{1}(\lambda)$ композицияни қараймиз. $J_1(\alpha)$ оператор алмаштириш оператори бўлади.

$$J_{\lambda}^{1}(\lambda) f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right) J_{\lambda}^{1}(\alpha) f(x) \ , \alpha > 1$$

ва уни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$J_{\lambda}^{1}(\alpha) f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x \frac{(x^2-)^{\alpha}}{2x} \Xi_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}; \alpha+1; 1 - \frac{s^2}{x^2}; \frac{\lambda^2}{4}(s^2 - x^2)\right) f'(s) ds \tag{5}$$

бу ерда $\Xi_2(a, b, c, \sigma, \omega)$ -Гумбертнинг бузиладиган гипергеометрик функцияси бўлиб, у қуйидагича аниқланади:

$$\Xi_2(a, b, c, \delta, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_{m+n}} \frac{\delta^m}{m!} \frac{\omega^n}{n!}, \ \ |\delta| < 1, |\omega| < +\infty.$$

Исбот. $J_{\lambda}^{1}(\alpha)$ операторнинг алмаштириш оператори бўлиши J_{λ} операторнинг алмаштириш оператори эканлиги ва I_{0+}^{α} операторнинг $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ $, k = 0, 1, \ldots$ оператор билан коммутатив эканлигидан келиб чиқади.

(5) ифодани келтириб чиқарамиз.

$$\begin{aligned} I_{0+}^{\alpha} J_{\lambda} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_0^t J_0(\lambda\sqrt{t^2 - s^2}) f'(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f'(s) ds \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} J_0\left(\lambda\sqrt{t^2 - s^2}\right) dt \end{aligned} \tag{6}$$

Бессел функциясини қаторга ёйилмасидан (бу қатор текис яқинлашувчи) фойдаланамиз:

$$\int_s^x (x-t)^{\alpha-1} J_0\left(\lambda\sqrt{t^2 - s^2}\right) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t^2 - s^2)^m dt =$$

$$(x-s)^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[-\frac{\lambda^2}{2}(x-s)s\right]^m}{(m!)^2} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^m \left(1 + +\frac{x-s}{2s} y\right)^m dy =$$

$$= (x-s)^{\alpha} \Gamma(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[-\frac{\lambda^2}{2}(x-s)s\right]^m}{(m!)^2 \Gamma(\alpha+m+1)} = F_1\left(-m; m+1; \alpha+m+1; \frac{s-x}{2s}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{(x^2-s^2)^{\alpha}}{2x} \Xi_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}; \alpha+1; 1 - \frac{s^2}{x^2}; \frac{\lambda^2}{4}(s^2 - x^2)\right)$$

Охирги ифодани (6) тенгликка қўйиб, исботланиши лозим бўлган (5) тенгликни ҳосил қиламиз.

Худди шунга ўхшаб қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

2-теорема. $J_{\lambda} I_{0+}^{\alpha} = I_{0+}^{-\alpha} J_{\lambda}(\alpha) \ I_{0+}^{\alpha} = J_{\lambda}^{2}(\alpha)$ операторга қараймиз, $J_{\lambda}^{2}(\alpha)$ оператор алмаштириш оператори бўлади :

$$J_{\lambda}^{2}(\lambda) f''(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\right) J_{\lambda}^{2}(\alpha) f(x) \ , \alpha > 1$$

ва уни қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$J_{\lambda}^{2}(\lambda) f = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (2s)^{-\alpha} (x^2 - s^2)^{\alpha} \times \Xi_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}; \alpha+1; 1 - \frac{x^2}{s^2}; \frac{\lambda^2}{4}(s^2 - -x^2)\right) f'(s) ds.$$

Адабиётлар:

1. Carroll R. Transmutation theory and applications. North – Holland, 1985. 351 p.

2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их изменения. – Минск, 1987.

(Тақризчи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).