ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2018
октябрь

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

МАТЕМАТИКА

УДК.519.21

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

А.Мадрахимов, С.Кукиева

Аннотация

В работе изучен вопрос об оценке функции концентрации для сумм минимумов положительных случайных величин.

Аннотация

Мақолада мусбат тасодифий миқдорлар минимумлари йиғиндиси учун концентрация функциясининг баҳоси ўрганилган.

Annotation

The paper studies the question of estimating the concentration function for the sums of minima of positive random variables.

Ключевые слова и выражения: *выборка, случайная величина, функции распределения, оценка функции концентрации.*

Таянч сўз ва иборалар: *танланма, тасодифий миқдор, тақсимот функциялари, концентрация функциясининг баҳоси.*

Keywords and expressions: *sampling, random variable, distribution functions, estimation of concentration. function.*

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ выборка объёма *n* независимых одинаково распределенных положительных случайных величин с функцией распределения $F(\mathrm{x}) = \mathrm{P}(\mathrm{x}_1 < \mathrm{x})$ и пусть

$$S_n = x_1 + \min(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) + ... + \min(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n) = \sum_{k=1}^{n} \min(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_k) \qquad (1)$$

В работе [1] изучен вопрос о сходимости с вероятностью единицы случайной величины S_n а в [2] сходимость к нормальному закону.

Далее в работе [3] изучена скорость сходимости этой случайной величины к нормальному закону. В предлагаемой работе изучается вопрос об оценке функции концентрации случайной величины S_n, то есть

$$Q(\mathrm{S}_n; \lambda) = \sup_{x \ge a} P(\mathrm{x} \le \mathrm{S}_n \le \mathrm{x} + \lambda), \quad \lambda \ge 0$$

Оценка функции концентрации $Q(\mathrm{S}_n; \lambda)$ случайной величины S_n сначала получена для экспоненциально распределённых случайных величин, а затем для произвольно распределённых случайных величин.

Пусть $Z_1, Z_2, ... Z_n$ выборка объёма *n* из независимых экспоненциально распределённых случайных величин с функцией распределения

$$P(\mathrm{Z}_1 < \mathrm{x}) = \max(0, 1 - \mathrm{e}^{-x})$$

и пусть

$$\tilde{S}_n = Z_1 + \min(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2) + ... + \min(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2, ..., \mathrm{Z}_n)$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для любого $\lambda \ge 0$

$$Q(\tilde{\mathrm{S}}_n; \lambda) \le \mathrm{C} \frac{\lambda}{\sqrt{\log n}} \qquad (2)$$

где *C* – положительная константа не зависящая от *n*.

Доказательство. Пусть $f_n(t) = Me^{it\tilde{S}_n}$. В [2] Хёглундом найдена характеристическая

А.Мадрахимов – *ФерГУ, кандитат физико-математических наук, доцент.*
С.Кукиева – *ФерГУ, преподаватель кафедры математики.*

функция случайной величины $\tilde{S}_n$. Она имеет вид

$$f_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{it}{k(1-it)}\right).$$

Поэтому в силу Леммы 3. ([3] стр. 54) справедливо

$$Q(\tilde{S}_n;\lambda)\le C\max\left(\lambda,\frac{1}{a}\right)\int_{-a}^{a}|f_n(t)|\,dt \tag{3}$$

для любых $\lambda\ge 0$ и $a>0$. Положив $a=\dfrac{1}{\lambda}$, из (3) имеем

$$Q(\tilde{S}_n;\lambda)\le C\cdot\lambda\int_{|t|\le\frac{1}{\lambda}}|f_n(t)|\,dt\le C\cdot\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{it}{k(1-it)}\right)\right|dt \tag{4}$$

$f_n(t)$ - преобразуем в следующем виде

$$f_n(t)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{it}{k(1-it)}\right)=e^{\sum_{k=1}^{n}\frac{it}{k(1-it)}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{it}{k(1-it)}\right)e^{-\frac{it}{k(1-it)}} \tag{5}$$

Так как $(1+z)e^{-z}=1+0(z^2)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}<\infty$, то

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{it}{k(1-it)}\right)e^{-\frac{it}{k(1-it)}}=1+0(t^2) \tag{6}$$

равномерно по *n*.

Далее, так как

$$\frac{it}{1-it}=it-t^2+O(t^3)\,,$$

то имея в виду (6) из (5) получим

$$f_n(t)=e^{(it-t^2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\left[1+O(t^2)+O\left(t^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]$$

В силу последнего из (4) находим, что

$$\begin{aligned}Q(\tilde{S}_n;\lambda)&\le C\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{(it-t^2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\left[1+O(t^2)+O\left(t^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\right]\right|dt=\\&=\lambda C\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2A_n}\,|1+O(t^2)+O(t^3A_n)|dt\le\lambda C\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2A_n}dt+\right.\\&\left.+C_1\int_{-\infty}^{\infty}t^2e^{-t^2A_n}dt+C_2\int_{-\infty}^{\infty}|t|^3\,A_ne^{-t^2A_n}dt\right]\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь C_1, C_2 и далее C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 – некоторые константы независящие от n, $A_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

Оценив каждый интеграл, участвующий в соотношении (7), легко убедиться в том, что

$$Q(\tilde{S}_n;\lambda)=C\frac{\lambda}{\sqrt{A_n}}$$

Имея в виду того, что $A_n = \log n + O(1)$, получим $Q(\tilde{S}_n;\lambda) \le C\dfrac{\lambda}{\sqrt{\log_n}}$, что и требовалось доказать.

Пусть, теперь $x_1, x_2, ..., x_n$ положительные одинаково распределенные случайные величины с произвольной функцией распределения $F(x) = P(x_1 < x)$ с плотностью $p(x) > 0.$

Предположим, что для $0 < x < \delta,\ \ \exists\ \ p(x) = F'(x) > 0$ и $\exists\ p'(x) < C < \infty$.

Пусть $H(x) = F^{-1}\left(1 - e^{-x}\right),\ \ H(0) = 0,\ \ H'(0) = \dfrac{1}{p(0)}$,

$$|H''(0)| < C < \infty .$$

Обозначим $V_k = \min(Z_1, Z_2, ..., Z_k)$. Тогда случайная величина S_n и $\sum_{k=1}^{n} H(V_k)$ одинаково распределены и имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть

1) Для любого $0 < x < \delta,\ \ P(x) \ge 0,\ \ p'(0) < C$
2) $|H''(0)| < C < \infty$

Тогда для любого $\lambda \ge 0$

$$Q(S_n;\lambda) \le C\frac{\lambda}{\sqrt[4]{\log_n}}$$

где *C* – положительная постоянная независящая от *n*. Эта теорема доказывается с помощью теоремы 1, как в [4].

Литература:

1. Grenander (V) (1965) A limit theorem for sums of minima of stochactic variables. Ann. Math Statist 36. (pp. 1041-1042)
2. Höglund Asymptoric normality of sums of minima of random variables. The Ann. of. Math. Statist. 1972, vol 43, № 1. -pp 351-353.
3. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. -М., Наука, 1972 .
4. Мадрахимов А.Э. Оценки функции концентрации для линейной комбинации порядковых статистик. Изв. АН Узб., Серия физ.-мат.наук, 1981, № 5. -с.12-17.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).