ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2018
апрель

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.82+517.43+517.22

АРАЛАШ КАСР ТАРТИБЛИ ИНТЕГРАЛЛАР ВА ҲОСИЛАЛАР

Ҳ.Қосимов, Б.Тиллабаев

Аннотация

Ушбу мақолада аралаш каср тартибли интеграллар ва ҳосилаларга таъриф берилган ҳамда уларнинг баъзи хоссалари ўрганилган.

Аннотация

В настоящей работе даны определения интегралам и производным смешанного дробного порядка и изучены некоторые их свойства.

Annotation

In the work mixed fractional order integrals and derivatives and their some properties are studied.

***Калит сўз ва иборалар**: интеграл тенгламалар, аралаш каср тартибли интеграл, аралаш каср тартибли ҳосила.*

***Ключевые слова и выражения:** интегральные уравнения, интеграл смешанного дробного порядка, смешанная производная дробного порядка.*

***Keywords and expressions:** integral equations, mixed fractional order integral, mixed fractional order derivative*

---

1. Кўп ўзгарувчан Абел интеграл тенгламаси.

Бизга $\varphi(x)=\varphi(x_1,...,x_n)$ ҳамда $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ кўп ўзгарувчан функциялар ва $a=(a_1,...,a_n)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ сонлар берилган бўлсин.

Ушбу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)}\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{1-\alpha_1}...(x_n-t_n)^{1-\alpha_n}}=f(x_1,...,x_n) \qquad (1)$$

кўринишдаги тенглама кўп ўзгарувчан Абел интеграл тенгламаси дейилади. Бу ерда $\Gamma(.)$ - Эйлернинг Гамма функцияси $[1]$.

Бу тенгликда $[2]$ ишдаги каби x_i ни t_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ билан алмаштириб, ҳар икки томонини $\frac{1}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}$ ифодага кўпайтирамиз ва $t_1,...,t_n$ бўйича мос равишда a_i дан x_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ гача интеграллаймиз:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)}\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}\frac{dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}\int_{a_1}^{t_1}...\int_{a_n}^{t_n}\frac{\varphi(s_1,...,s_n)ds_1...ds_n}{(t_1-s_1)^{1-\alpha_1}...(t_n-s_n)^{1-\alpha_n}}=$$

$$=\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}\frac{f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}$$

Дирихле формуласига асосан интеграллаш тартибини алмаштириб, қуйидаги

***Ҳ.Қосимов –** ФарДУ, физика-математика фанлари номзоди, доцент.*

***Б.Тиллабаев –** ФарДУ дифференциал тенгламалар йўналиши магистранти.*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\varphi(s_1,...,s_n)ds_1...ds_n\times$$
$$\times\int\limits_{s_1}^{x_1}...\int\limits_{s_n}^{x_n}\frac{dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}(t_1-s_1)^{1-\alpha_1}...(t_n-s_n)^{1-\alpha_n}}= \tag{2}$$
$$=\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\frac{f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Тенгликнинг чап томонидаги ички интегралларда $t_i=s_i+\tau_i(x_i-s_i),\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ алмаштириш бажарамиз:

$$\int\limits_{s_1}^{x_1}...\int\limits_{s_n}^{x_n}\frac{dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}(t_1-s_1)^{1-\alpha_1}...(t_n-s_n)^{1-\alpha_n}}=$$
$$=B(\alpha_1,1-\alpha_1)...B(\alpha_n,1-\alpha_n)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)\Gamma(1-\alpha_n).$$

У ҳолда (2) га асосан қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\varphi(s_1,...,s_n)ds_1...ds_n=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\frac{f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}. \tag{3}$$

Бу тенгликни ҳар икки томонини $x_1,...,x_n$ ўзгарувчилар бўйича дифференциаллаб, кўп ўзгарувчан Абел интеграл тенгламасининг ечимини ҳосил қиламиз:

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\frac{f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}. \tag{4}$$

Шундай қилиб, агар (1) тенгламанинг ечими мавжуд бўлса, у (4) кўринишда ифодаланади.

Шу усулда кўрсатиш мумкинки, ушбу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)}\int\limits_{x_1}^{b_1}...\int\limits_{x_n}^{b_n}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(t_1-x_1)^{1-\alpha_1}...(t_n-x_n)^{1-\alpha_n}}=f(x_1,...,x_n) \tag{5}$$

интеграл тенгламанинг ечими

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\int\limits_{x_1}^{b_1}...\int\limits_{x_n}^{b_n}\frac{f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n}{(t_1-x_1)^{\alpha_1}...(t_n-x_n)^{\alpha_n}} \tag{6}$$

формула билан аниқланади.

2. Кўп ўзгарувчан функция учун аралаш каср тартибли интеграл.

$\Omega=\left\{(x_1,...,x_n):\ a_i<x_i<b_i,\ \ -\infty<a_i<b_i<+\infty,\ i=\overline{1,n}\right\}$ бўлсин.

Таъриф. $\varphi(x_1,...,x_n)\in L_1(\Omega)$ ва $\alpha_i>0,\ i=\overline{1,n}$ бўлсин. Ушбу

$$D^{-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{-\alpha_1-1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_n-1}\times \tag{7}$$
$$\times\varphi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n$$

$$D^{-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n}_{x_1,...,x_n;b_1,...,b_n}\varphi(x_1,...,x_n)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)}\int\limits_{x_1}^{b_1}...\int\limits_{x_n}^{b_n}(t_1-x_1)^{-\alpha_1-1}...(t_n-x_n)^{-\alpha_n-1}\times \tag{8}$$
$$\times\varphi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n$$

кўринишдаги ифодалар кўп ўзгарувчан $\varphi(x_1,...,x_n)$ функциянинг (Риман-Лиувилл) маъносидаги аралаш каср тартибли интеграллари дейилади.

$$D^{-\alpha_1,...,-\alpha_n}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n) \quad \text{ва} \quad D^{-\alpha_1,...,-\alpha_n}_{x_1,...,x_n;b_1,...,b_n}\varphi(x_1,...,x_n)$$

функциялар Ω соҳанинг деярли барча нуқталарида аниқланган бўлиб, $L_1(\Omega)$ синфга тегишли бўлади.

Бу таърифга асосан (1) ва (5) кўп ўзгарувчан Абел интеграл тенгламаларини

$$\begin{aligned}&D^{-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n), \quad a_i>0, \ \ i=\overline{1,n},\\ &D^{-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_n}_{x_1,...,x_n;b_1,...,b_n}\varphi(x_1,...,x_n)=f(x_1,...,x_n), \quad a_i>0, \ \ i=\overline{1,n}\end{aligned} \tag{9}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $0<\alpha_{i1},\ \alpha_{i2}<+\infty,\ i=\overline{1,n}$ бўлса, деярли ҳамма $(x_1,...,x_n)\in\Omega$ учун

$$\begin{aligned}&D^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}D^{-\alpha_{11},-\alpha_{21},...,-\alpha_{n1}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}f(x_1,...,x_n)=D^{-\alpha_{11},-\alpha_{21},...,-\alpha_{n1}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\times\\ &\times D^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}f(x_1,...,x_n)=D^{-(\alpha_{11}+\alpha_{12}),-(\alpha_{21}+\alpha_{22}),...,-(\alpha_{n1}+\alpha_{n2})}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}f(x_1,...,x_n)\end{aligned} \tag{10}$$

тенгликнинг тўғри эканлигини текширамиз:

$$D^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}D^{-\alpha_{11},-\alpha_{21},...,-\alpha_{n1}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}f(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_{11})\Gamma(\alpha_{21})...\Gamma(\alpha_{n1})}D^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\times$$
$$\times\int\limits_{a}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{-\alpha_{11}-1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_{n1}-1}f(t_1,...,t_n)dt_1...dt_n\ .$$

Ушбу тенгликда x_i ни t_i билан t_i ни s_i билан $(i=\overline{1,n})$ белгилаймиз:

$$D^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}D^{-\alpha_{11},-\alpha_{21},...,-\alpha_{n1}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}f(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_{11})\Gamma(\alpha_{21})...\Gamma(\alpha_{n1})}D^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\times$$
$$\times\int\limits_{a}^{t_1}...\int\limits_{a_n}^{t_n}(t_1-s_1)^{-\alpha_{11}-1}...(t_n-s_n)^{-\alpha_{n1}-1}f(s_1,...,s_n)ds_1...ds_n,$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_{11})\Gamma(\alpha_{21})...\Gamma(\alpha_{n1})\cdot\Gamma(\alpha_{12})\Gamma(\alpha_{22})...\Gamma(\alpha_{n2})}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_1}^{x_n}\left[\int\limits_{a}^{t_1}...\int\limits_{a_n}^{t_n}(t_1-s_1)^{-\alpha_{11}-1}...(t_n-s_n)^{-\alpha_{n1}-1}\times\right.$$
$$\left.\times f(s_1,...,s_n)ds_1...ds_n\right](x_1-t_1)^{-\alpha_{12}-1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_{n2}-1}dt_1...dt_n\ .$$

Дирихле формуласидан фойдаланиб, интеграллаш тартибини алмаштириб,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_{11})\Gamma(\alpha_{21})...\Gamma(\alpha_{n1})\cdot\Gamma(\alpha_{12})\Gamma(\alpha_{22})...\Gamma(\alpha_{n2})}\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_1}^{x_n} f(s_1,...,s_n)\,ds_1...ds_n\times$$

$$\times\int_{s_1}^{x_1}...\int_{s_n}^{x_n}(t_1-s_1)^{-\alpha_{11}-1}...(t_n-s_n)^{-\alpha_{n1}-1}(x_1-t_1)^{-\alpha_{12}-1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_{n2}-1}\,dt_1...dt_n$$

тенгликка келамиз. Охирги ички интегралда $t_i=s_i+(x_i-s_i)\tau_i,\ \ i=\overline{1,n}$ алмаштириш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\Gamma(\alpha_{11})...\Gamma(\alpha_{n1})\cdot\Gamma(\alpha_{12})...\Gamma(\alpha_{n2})}{\Gamma(\alpha_{11})...\Gamma(\alpha_{n1})\cdot\Gamma(\alpha_{12})...\Gamma(\alpha_{n2})\cdot\Gamma(\alpha_{11}+...+\alpha_{n1})\Gamma(\alpha_{12}+...+\alpha_{n2})}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{\alpha_{11}+\alpha_{12}-1}...(x_n-s_n)^{\alpha_{n1}+\alpha_{n2}-1}dt_1...dt_n=D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{-(\alpha_{11}+\alpha_{12}),...,-(\alpha_{n1}+\alpha_{n2})}f(x_1,...,x_n).$$

Бу эса (10) тенглик тўғри эканлигини кўрсатади.

Шунга ўхшаш

$$D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{-\alpha_{11},-\alpha_{21},...,-\alpha_{n1}}D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{-\alpha_{12},-\alpha_{22},...,-\alpha_{n2}}f(x_1,...,x_n)=D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{-(\alpha_{11}+\alpha_{12}),-(\alpha_{21}+\alpha_{22}),...,-(\alpha_{n1}+\alpha_{n2})}f(x_1,...,x_n)$$

тенгликни ҳам исботлаш мумкин.

3. Кўп ўзгарувчан функция учун аралаш каср тартибли ҳосилалар.

Таъриф. $\varphi(x_1,...,x_n)-\Omega$ соҳада аниқланган ва $0<\alpha_i<1,\ i=\overline{1,n}$ бўлсин.

$$D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{\alpha_1,...,\alpha_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\times$$

$$\times\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)\,dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}},\tag{11}$$

$$D_{x_1,...,x_n;b_1,...,b_n}^{\alpha_1,...,\alpha_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\times$$

$$\times\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\int_{x_1}^{b_1}...\int_{x_n}^{b_n}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)\,dt_1...dt_n}{(t_1-x_1)^{\alpha_1}...(t_n-x_n)^{\alpha_n}},\tag{12}$$

кўринишдаги ифодалар $\varphi(x_1,...,x_n)$ функциянинг аралаш каср тартибли (Лиувилл маъносидаги) ҳосилалари дейилади.

Бу таърифга асосан (1) ва (5) кўп ўзгарувчан Абел интеграл тенгламалари ечимини берувчи (4) ва (6) тенгликларни мос равишда

$$\varphi(x_1,...,x_n)=D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{\alpha_1,...,\alpha_n}f(x_1,...,x_n),$$
$$\varphi(x_1,...,x_n)=D_{x_1,...,x_n;b_1,...,b_n}^{\alpha_1,...,\alpha_n}f(x_1,...,x_n)\tag{13}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Қуйидаги ифодалар $\varphi(x_1,...,x_n)$ функциянинг аралаш каср тартибли хусусий ҳосилалари дейилади:

$$D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{\alpha_1,...,\alpha_{k-1},0,\alpha_{k+1},...,\alpha_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_{k-1})\cdot}\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_{k+1})...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_1...\partial x_{k-1}\partial x_{k+1}...\partial x_n}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_{k-1}}^{x_{k-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{a_{k+1}}^{x_{k+1}}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_{k-1}dt_{k+1}...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_{k-1}-t_{k-1})^{\alpha_{k-1}}(x_{k+1}-t_{k+1})^{\alpha_{k+1}}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}},$$

$$D^{\alpha_1,...,\alpha_{k-1},0,0,\alpha_{k+2},...,\alpha_n}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_{k-1})\cdot}\times$$

$$\times\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_{k+2})...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x_1...\partial x_{k-1}\partial x_{k+2}...\partial x_n}\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_{k-1}}^{x_{k-1}}\times$$

$$\times\int\limits_{a_{k+2}}^{x_{k+2}}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)dt_1...dt_{k-1}dt_{k+2}...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_{k-1}-t_{k-1})^{\alpha_{k-1}}(x_{k+2}-t_{k+2})^{\alpha_{k+2}}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}$$

ва ҳоказо

$$D^{0,...,0,\alpha_k,0,...,0}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{a_k}^{x_k}\frac{\varphi(t_1,...,t_n)dt_k}{(x_k-t_k)^{\alpha_k}}. \tag{14}$$

Лемма. Агар $\varphi(x_1,...,x_n)$ функция Ω соҳада абсолют узлуксиз бўлса, Ω соҳанинг деярли барча нуқталарида $\varphi(x_1,...,x_n)$ функциянинг $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ тартибли ҳосилалари мавжуд бўлиб, қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$D^{\alpha_1,...,\alpha_n}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\left[\frac{\varphi(a_1,...,a_n)}{(x_1-a_1)^{\alpha_1}...(x_n-a_n)^{\alpha_n}}+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}\frac{1}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}}\frac{\partial^n}{\partial t_1...\partial t_n}\varphi(t_1,...,t_n)\,dt_1...dt_n\right], \tag{15}$$

$$D^{\alpha_1,...,\alpha_n}_{x_1,...,x_n;b_1,...,b_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\left[\frac{\varphi(b_1,...,b_n)}{(b_1-x_1)^{\alpha_1}...(b_n-x_n)^{\alpha_n}}+\right.$$
$$\left.+(-1)^n\int\limits_{x_1}^{b_1}...\int\limits_{x_n}^{b_n}\frac{1}{(t_1-x_1)^{\alpha_1}...(t_n-x_n)^{\alpha_n}}\frac{\partial^n}{\partial t_1...\partial t_n}\varphi(t_1,...,t_n)\,dt_1...dt_n\right]. \tag{16}$$

Мисол: $\varphi(x_1,...,x_n)=(x_1-a_1)^{\alpha_1-1}...(x_n-a_n)^{\alpha_n-1}$.

$$D^{\alpha_1,...,\alpha_n}_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}\varphi(x_1,...,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\times$$

$$\times\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{-\alpha_1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_n}\cdot(t_1-a_1)^{\alpha_1-1}...(t_n-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt_1...dt_n$$

Интеграл ўзгарувчисини $t_i=a_i+(x_i-a_i)\tau_i,\ i=\overline{1,n}$ тенгликлар орқали алмаштирамиз;

$$\int\limits_{a_1}^{x_1}...\int\limits_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{-\alpha_1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_n}\cdot(t_1-a_1)^{\alpha_1-1}...(t_n-a_n)^{\alpha_n-1}\,dt_1...dt_n\Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{\tau_i^{\alpha_i}(x_i-a_i)^{\alpha_i}(x_i-a_i)d\tau_i}{(x_i-a_i)(x_i-a_i)^{\alpha_i}\tau_i(1-\tau_i)^{\alpha_1}} = \prod_{i=1}^n \int_0^1 \tau_i^{\alpha_i-1}(1-\tau_i)^{-\alpha_i}\,d\tau_i =$$

$$=\prod_{i=1}^n B(\alpha_i,1-\alpha_i)=\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)\Gamma(1-\alpha_i)$$

$$D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\dots\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1\dots\partial x_n}\times$$

$$\times\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_n)\cdot\Gamma(1-\alpha_1)\dots\Gamma(1-\alpha_n)=0$$

Қуйидаги ифодалар $f(x_1,\dots,x_n)$ функциянинг юқори аралаш каср тартибли ҳосилалари дейилади.

$$D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n} f(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{\Gamma(m_1-\alpha_1)\dots\Gamma(m_n-\alpha_n)}\frac{\partial^{m_1+\dots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{x_1}\dots\int_{a_n}^{x_n}\frac{f(t_1,\dots,t_n)dt_n\dots dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1-m_1+1}\dots(x_n-t_n)^{\alpha_n-m_n+1}}\,, \tag{17}$$

бу ерда $m_i=[\alpha_i]+1$, $i=\overline{1,n}$.

Одатда $\alpha_i>0$ бўлганда, каср тартибли интеграллар кўринишида ифодаланувчи функциялар синфи $D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}(L_p)$ билан белгиланади, яъни

$$D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}(L_p)=\{f(x_1,\dots,x_n): f(x_1,\dots,x_n)=D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\varphi(x_1,\dots,x_n),$$
$$\varphi(x_1,\dots,x_n)\in L_p(\Omega),\ 1\le p<\infty\}.$$

Таъриф. $\alpha_i>0\ \ (i=\overline{1,n})$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} &D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n),\\ &D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{x_1,\dots,x_n;b_1,\dots,b_n}D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{x_1,\dots,x_n;b_1,\dots,b_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n). \end{aligned} \tag{18}$$

тенгликлар барча $D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}(L_1)$ функциялар учун,

$$\begin{aligned} &D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n),\\ &D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{x_1,\dots,x_n;b_1,\dots,b_n}D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{x_1,\dots,x_n;b_1,\dots,b_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)=\varphi(x_1,\dots,x_n). \end{aligned} \tag{19}$$

тенгликлар эса мос равишда барча

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)\in D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}(L_1),\ \varphi(x_1,\dots,x_n)\in D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{x_1,\dots,x_n;b_1,\dots,b_n}(L_1).$$

функциялар учун бажарилади. (18) тенгликни исботлайлик. Таърифга кўра

$$D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}D^{-\alpha_1,\dots,-\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\varphi(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_n)}\int_{a_1}^{x_1}\dots\int_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{\alpha_1-1}\dots(x_n-t_n)^{\alpha_n-1}\varphi(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_n)}D^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{a_1,\dots,a_n;x_1,\dots,x_n}\int_{a_1}^{x_1}\dots\int_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{\alpha_1-1}\dots(x_n-t_n)^{\alpha_n-1}\varphi(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n\ .$$

Юқоридаги ифодада x_i ни t_i билан t_i ни эса s_i, $i=\overline{1,n}$ билан алмаштирамиз:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}(x_1-t_1)^{-\alpha_1}...(x_n-t_n)^{-\alpha_n}\,dt_1...dt_n\times$$

$$\times\int_{a_1}^{t_1}...\int_{a_n}^{t_n}(t_1-s_1)^{\alpha_1-1}...(t_n-s_n)^{\alpha_n-1}\varphi(s_1,...,s_n)\,ds_1...ds_n\,.$$

Сўнгра Дирихле формуласидан фойдаланиб, интеграллар тартибини алмаштирамиз:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_n)\Gamma(1-\alpha_1)...\Gamma(1-\alpha_n)}\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\times$$

$$\times\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}\varphi(s_1,...,s_n)\,ds_1...ds_n\times$$

$$\times\int_{s_1}^{x_1}...\int_{s_n}^{x_n}\frac{dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}(t_1-s_1)^{1-\alpha_1}...(t_n-s_n)^{1-\alpha_n}}=$$

$$\int_{s_1}^{x_1}...\int_{s_n}^{x_n}\frac{dt_1...dt_n}{(x_1-t_1)^{\alpha_1}...(x_n-t_n)^{\alpha_n}(t_1-s_1)^{1-\alpha_1}...(t_n-s_n)^{1-\alpha_n}}=$$

$$\int_0^1\frac{\tau_i^{\alpha_i}(x_i-s_i)^{\alpha_i}(x_i-s_i)\,d\tau_i}{(x_i-s_i)^{\alpha_i}(x_i-s_i)\tau_i(1-\tau_i)^{\alpha_i}}=\int_0^1\prod_{i=1}^{n}\tau_i^{\alpha_i-1}(1-\tau_i)^{-\alpha_i}\,d\tau_i=$$

$$=\prod_{i=0}^{n}\Gamma(\alpha_i)\Gamma(1-\alpha_i).$$

Буни эътиборга олсак,

$$D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{\alpha_1,...,\alpha_n}D_{a_1,...,a_n;x_1,...,x_n}^{-\alpha_1,...,-\alpha_n}\varphi(x_1,...,x_n)=$$

$$=\frac{\partial^n}{\partial x_1...\partial x_n}\int_{a_1}^{x_1}...\int_{a_n}^{x_n}\varphi(s_1,...,s_n)\,ds_1...ds_n=\varphi(x_1,...,x_n)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Адабиётлар:

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
2. Ўринов А. Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Ф., 2012.

(Тақризчи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).