ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

4-2020

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

УДК 517.956.6

УМУМЛАШГАН ҲОСИЛА АСОСИДА ФУНКЦИЯЛАР ТРИГАНОМЕТРИК ЁЙИЛМАСИНИНГ ЯГОНАЛИГИ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

ON THE BASIS OF GENERAL DERIVATIVE UNITY OF TRIGANOMETRIC DISTRIBUTION OF FUNCTIONS

У.Ахмедова [1]

[1] **У.Ахмедова** *– ФарДУ, математика йўналиши магистрант.*

Аннотация

Мақолада турли шаклдаги мураккаб функцияларни қаторларга ёйишда бу ёйилманинг ягоналигини таъминлаш масаласи кўриб чиқилган. Бунинг учун умумлашган ҳосила тушунчасидан фойдаланиб, умумлашган ҳосиланинг баъзи холларда 2-тартибли умумлашган ҳосила билан оддий маънодаги ҳосила ноъмалум нуқталардан ташқари оралиқ нуқталарда бир хил бўлиши кўрсатиган.

Аннотация

В статье рассматривается вопрос обеспечения однозначности развертки при развертывании сложных функций разных видов по рядам. Для этого используется понятие обобщенной производной и, показано, что обобщенное производное в некоторых случаях совпадает с обобщенной производной 2-го порядка и простой производной в неизвестных точках.

Annotation

The article discusses the issue of ensuring the uniqueness of this distribution when distributing complex functions of various types over rows. For this purpose, the concept of a generalized derivative is used; it is shown that the generalized derivative in some cases coincides with the generalized derivative of the 2nd order and a simple derivative at unknown points.

Таянч сўз ва иборалар: *умумлашган ҳосила, симметрик ҳосила, тригонометрик функция, қатор йиғиндисини топишнинг Риман методи.*

Ключевые слова и выражения: обобщенное производное, симметричное производное, тригонометрическая функция, метод Римана нахождения суммы рядов.

Keywords and expressions: *generalized derivative, symmetric derivative, trigonometric function, the Riemann method for the sum of the series.*

Умумлашган ҳосила тушунчаси. Фараз қилайлик, $[a,b]$ оралиқда узлуксиз *F(x)* функция берилган бўлсин. Бунда *x* учун $a<x<b$ шарт бажарилсин, у ҳолда етарлича чексиз кичик миқдорлар учун $\Delta_h F(x)=F(x+h)-F(x-h)$ чекли айирма маънога эга бўлади. Агар ушбу чекли айирма учун қуйидаги лимит мавжуд бўлса:

$$F'(x)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h F(x)}{2h}$$

у ҳолда бу лимит $F(x)$ нинг x *умумлашган (*симметрик*) ҳосиласи* дейилади. Равшанки, ушбу муносабатдан

$$\frac{\Delta_h F(x)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right]\to F'(x)$$

ва оддий маънодаги $F'(x)$ ҳосиланинг мавжуд бўлишидан, $h\to+0$да $F'(x)$ умумлашган ҳосиланинг мавжудлиги келиб чиқади. Аммо, баъзи ҳолларда оддий маънодаги ҳосила мавжуд бўлмаган ҳолда ҳам умумлашган ҳосила мавжуд бўлиши мумкин [1,2], масалан, ушбу функция учун

$$F(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x\neq0),\ F(0)=0;$$

$x=0$ нуқтада оддий маънодаги ҳосила мавжуд эмас, лекин унинг умумлашган ҳосиласи нолга тенг [1].

Иккинчи тартибли чекли айирмани кўриб чиқайлик:

$$\Delta_h^2 F(x)=\Delta_h\Delta_h F(x)=\Delta_h F(x+h)-\Delta_h F(x-h)=$$
$$=\left[F(x+2h)-F(x)\right]-\left[F(x)-F(x-2h)\right]=$$
$$= =F(x+2h)-2F(x)+F(x-2h).$$

Агар қуйидаги лимит мавжуд бўлса

$$F^{["]}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}, \qquad (1)$$

у ҳолда бу лимит $F(x)$ функциянинг x нуқтадаги *иккинчи тартибли умумлашган ҳосиласи* дейилади. Шунингдек, агар функциянинг оддий маънодаги иккинчи тартибли ҳосиласи $F''(x)$ мавжуд бўлса, унга тенг иккинчи тартибли умумлашаган ҳосиласи ҳам мавжуд бўлиши исботланган [1,2,5, 695].

Ҳақиқатан ҳам, агар h га боғлиқ бўлган $\Delta_h^2 F(x)$ ва $4h^2$ функциялар учун Коши формуласини қўлласак

$$\frac{\Delta_h^2 F(x)}{4h^2}=\frac{F'(x+2\theta h)-F'(x-2\theta h)}{4\theta h},$$

ва юқоридаги (1) маънодаги таърифга асосан $h\to 0$ да юқоридаги муносабат $F''(x)$ га интилади. Лекин, тескари тасдиқ ўринли эмас, яъни иккринчи тартибли умумлашган ҳосиланинг мавжудлигидан $F^{["]}(x)$ оддий маънодаги иккинчи тартибли ҳосиланинг мавжудлиги $F''(x)$ келиб чиқмайди.

Мисол, ушбу функциянинг

$$F(x)=x^2 sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0),\ F(0)=0$$

иккинчи тартибли умумлашган ҳосиланинг мавжудлигидан $F^{["]}(x)$ оддий маънодаги иккинчи тартибли ҳосиланинг мавжудлиги $F''(x)$ келиб чиқмайди [1,2,4].

Баъзи ҳолларда иккинчи тартибли умумлашган ҳосила оддий маънодаги иккинчи тартибли ҳосила вазифасини ҳам бажариши мумкин. Бу фикрни тасдиқлаш учун қуйидаги теоремани кўриб чиқамиз.

Теорема (Шварц теоремаси) Агар $[a,b]$ *оралиқда* $F(x)$ *функциянинг иккинчи тартибли умумлашган ҳосиласи* $F^{["]}(x)$ мавжуд бўлиб, ушбу оралиқда нолга тенг бўлса, у ҳолда $F'(x)$ *функция ушбу оралиқда чизиқли функция бўлиб* $F''(x)=0$ бўлади.

Исбот: ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун қуйидаги ёрдамчи функцияни тузамиз ва исбот жараёнини иккала ишора учун ҳам ўринли эканлигини қабул қиламиз

$$\varphi(x)=\pm\left\{F(x)-F(a)-\frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\}+\varepsilon(x-a)(x-b), \qquad (2)$$

у холда аниқланган оралиқда $\varphi^{["]}(x)=2\varepsilon$ эканлигини кўриш мумкин. $F(x)$

функциянинг иккинчи тартибли умумлашган ҳосиласининг нолга тенглигини ҳисобга олсак, квадратик функциянинг оддий маънодаги иккинчи тартибли ҳосиласи билан усима-уст тушади [2,3,4,7].

Шундай қилиб, (2) функция $[a,b]$ оралиқнинг чегаравий нуқталарида нолга тенглиги равшан. Энди оралиқ ичида бу функция мусбат қийматларни қабул қила олмаслигини аниқлаймиз. Хақиқатдан ҳам, агар сўнгги тасдиқнинг тескарисини фараз қилсак $\varphi(x)$ фунция узлуксиз бўлганлиги учун ўзининг энг катта мусбат қийматини $[a,b]$ оралиқнинг бирор бир x_0 нуқтасида қабул қилар эди. У холда қуйидаги муносабат

$$\varphi(x_0 \pm 2h) \le \varphi(x_0),\ \Delta_h\varphi(x_0) \le 0$$

ўринли, ва натижада

$$\varphi^{["]}(x_0) = \lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h\varphi(x_0)}{4h^2} \le 0$$

Юқоридаги муносабатга тескари эканлигини кўрамиз.

Шундай қилиб, ишорадан қатъий назар барча *x* лар учун $\varphi(x) \le 0$ бажарилади ёки

$$\pm\left\{F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right\} \le \varepsilon(x-a)(b-x) < \varepsilon(b-a)^2,$$

яъни

$$\left|F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\right| < \varepsilon(b-a)^2$$

ε нинг чексиз кичик миқдорлигини ҳисобга олсак теореманинг исботи равшан бўлади, яъни,

$$F(x) = F(a) + \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a),$$

Баъзи ҳолларда $F^{["]}(x) = 0$ шарт оралиқнинг баъзи нуқталаридан ташқари барча нуқталарида бажарилишини кузатиш мумкин, қолган нуқталар эса номаълум нуқталар, дейилади. Номаълум нуқталарга нисбатан Шварцнинг умумлашган теоремасини келтирамиз.

Теорема. *Фараз қилайлик,* $[a,b]$ *оралиқда* $F(x)$ *"номаълум нуқталар"дан ташқари барча нуқталарда иккинчи тартибли умумлашган ҳосила мавжуд бўлиб* $F^{["]}(x)$, *у нолга тенг бўлсин. Агар "номаълум нуқталар"ни*

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < b$$

орқали белгилаб уларнинг хар бирига нисбатан ушбу шарт бажарилса,

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h^2 F(x)}{2h} = 0, \qquad (3)$$

У холда $F(x)$ *функция* $[a,b]$ *чизиқли бўлади.*

Юқорида келтирилган теоремага асосан $F(x)$ функция "*номаълум нуқталар*" орасида (3) га асосан чизиқли бўлади ва ҳар бир оралиқ $[x_{i-1}, x_i]$ учун қуйидагига эга бўламиз:

$$F(x) = cx + d,$$

ва қўшни оралиқлар $[x_i, x_{i+1}]$ учун эса

$$F(x) = c'x + d'.$$

Шунга кўра $x = x_i$ нуқтада улар қийматлари устма-уст тушади, яъни:

$$F(x_i) = cx_i + d = c'x_i + d'. \qquad (4)$$

(2) шартга кўра $x = x_i$ да қуйидаги муносабат ўринли бўлади

$$\lim_{h\to+0}\left\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\right\} = 0$$

сўнгги муносабатнинг чап тарафи $y = cx + d$ ва $y = c'x + d'$ тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентларининг айирмасига тенг эканлигини кўрамиз ва (4) муносабатдан эса *d=d'* эканлиги келиб чиқади ва иккала оралиқ ҳам тўғри чизиқ бўлиб, уларнинг графигига кейингиси олдингисининг давоми шаклида қараш мумкин. Аниқланган ҳолат ихтиёрий қўшни оралиқларда ўринли бўлганлиги учун *F(x)* функция бутун [*a,b*] оралиқда чизиқли эканлигини аниқлаймиз.

Энди юқоридаги натижани функциялар тригонометрик ёйилмасига нисбатан қўллаймиз. Бунинг учун Риманнинг тригонометрик қаторлар йиғиндисини топиш методидан [2,5,6] фойдаланамиз. Бунда,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \qquad (5)$$

кўринишдаги тригонометрик қаторнинг йиғиндисини топишда Риман методидан фойдаланамиз. Умуман олганда, Риман методи нафақат (5) кўринишдаги қаторлар учун, балки ихтиёрий кўринишдаги тригонометрик қаторлар учун ҳам ўринлидир [2,4,7]. Фақат бундай қатор коэффициентларининг қуйидаги шартларни бажариши талаб этилади:

$$|a_n|, |b_n| \le L \ (L = const). \qquad (6)$$

агар (4) ни икки марта интегралласак, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$F(x) = \frac{a_0x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^2}\right) \qquad (7)$$

(6) шарт бажарилганда, бу қатор

$$L\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

яқинлашувчи қатор билан ўхшаш бўлади, демак, *x* ўзгарувчининг оралиқ қийматларида текис яқинлашувчи бўлиб *F(x)* функцияни аниқлайди [5,7, 419]. Агар, (7) функция учун *x* нуқтада қуйидаги лимит мавжуд бўлса,

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_h F(x)}{2h} = 0$$

у ҳолда бу лимитни Риман маъносидаги (5) нинг "*умумлашган йиғиндиси*", дейилади.

Масалан, ушбу методни қуйидаги қаторга қўлласак

$$\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}\cos nx,$$

қуйидаги натижани оламиз:

$$F(x) = \frac{x^2}{4} - \sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$

ва $0 \le x \le 2\pi$ оралиқ учун $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2} + \dfrac{\pi^2}{6}$, га эга бўламиз, демак

$$F(x)=\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{6}.$$

Бундан эса ушбу оралиқ учун $F^{["]}(x)=F''(x)=0$, келиб чиқади, яъни қаторнинг "*умумлашган йиғиндиси*" нолга тенг. Бу мисол учун қуйидаги муносабатлар ўринли эканлигини кузатиш мумкин

$$\Delta_h^2\cos nx=-2\cos nx(1-\cos 2nh)=-4\cos nx\sin^2 nh$$

ва

$$\Delta_h^2\sin nx=-4\sin nx\sin^2 nh.$$

Бундан эса

$$\frac{\Delta_h^2F(x)}{4h^2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2. \qquad (8)$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, Риман методи (8) муносабатни $h\to 0$ да қатор ҳадларини $\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$ га кўпайтиришдан иборатдир. Бу усулни ихтиёрий кўринишдаги қаторлар учун ҳам қўллаш мумкин эканлигини кузатишимиз мумкин, яъни қуйидаги ихтиёрий қатор берилган бўлсин:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n,$$

агар

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2,$$

қатор *h* нинг етарли кичик қийматлари учун яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $\varphi(h)$ бўлса ва $h\to 0$ да *U* интилса, у ҳолда бу лимит берилган қаторнинг "*умумлашган йиғиндиси*" бўлади.

Шундай қилиб, Риманнинг умумлашган йиғинди методи регуляр метод эканлигини ва уни функциялар тригонометрик ёйилмасининг ягоналиги масаласини ечишда қўллаш мумкин

Адабиётлар:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1-том, 1978 г.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 3-том, 1978 г.
3. Голач, Б.А. Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.:Лань, 2013..
4. Азларов. Т., Мансуров. Х., Математик анализ. Т.: «Ўзбекистон». 1 т: 1994 й.
5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: «Высшая школа», 1999 .
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г.
7. Claudia Canuto, Anita Tabacco. Mathematical analysis. I. Springer-Verlag. Italia, Milan. 2008.

(Тақризчи: А.Ўринов — физика-математика фанлари доктори, профессор).

.