O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

# FarDU. ILMIY XABARLAR

1995-yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2025
ANIQ FANLAR

# НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

MATEMATIKA



FIZIKA-TEXNIKA



ILMIY AXBOROT

FarDU. Ilmiy xabarlar – Scientific journal of the Fergana State University

Volume 31 Issue 2, 2025-yil DOI: 10.56292/SJFSU/vol31_iss2/a168

UO'K: 517.95

# UCHINCHI TARTIBLI GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN KOSHI MASALASI

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОВО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

# CAUCHY PROBLEM FOR A THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATION

**Karimov Shahobiddin To'ychiboyevich**
Farg'ona davlat universiteti, fizika matematika fanlari doktori, amaliy matematika va informatika kafedrasi professori

**Abdumo'minova Shaxlo Abduqodir qizi**
Farg'ona davlat universiteti, Matematika mutaxassisligi magistranti

***Annotatsiya***

*Maqola chiziqli bo'lmagan akustika nazariyasi, plazmaning gidrodinamika nazariyasi, g'ovakli muhitlarda suyuqliklarni filtralash masalalari va boshqa ko'plab amaliy masalalar ko'pincha uchinchi tartibli kichik hadlar qatnashgan differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarga keltiriladi. Bundan ko'rinadiki, uchinchi tartibli kichik hadlar qatnashgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalalar yechish yuqoridagi amaliy masalalarni tahlillari va xususiyatlari to'g'risida to'liq tasavvurni ta'minlagan holda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb yo'nalishlaridan biri sifatida muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.*

*Yuqorida ta'kidlaganimizdek ko'plab amaliy ahamiyatga ega bo'lgan masalalar, jumladan, g'ovak muhitlarda suyuqlik filtratsiyasi jarayonlari* $[1,2]$ *ko'p qatlamli muhitlarda erkin sirtli yer osti suvlarining harakati* $[3]$ *va boshqalar, uchinchi tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishga olib keladi.*

*T.D.Juraev va A.Popeleklarni* $[4]$ *maqolasida uchinchi tartibli differensial tenglamalarning to'liq sinflash va kanonik ko'rinishga keltirish bayon etilgan.*

*Singuliyar Bessel operatori qatnashgan uchinchi va yuqori tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun masalalar* $[5,6,7,8,9,10]$ *ishlarda o'rganilgan.*

*Ushbu maqolada bir jinsli bo'lmagan uchinchi tartibli giperbolik model tenglama uchun Koshi masalasi o'rganilgan.*

***Аннотация***

*Теория нелинейной акустики, гидродинамика плазмы, задачи фильтрации жидкостей в пористых средах и многие другие прикладные задачи часто приводят к краевым задачам для дифференциальных уравнений третьего порядка с малыми членами. Это указывает на то, что решение краевых задач для дифференциальных уравнений с малыми членами третьего порядка имеет важное значение как одно из актуальных направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных, обеспечивая полное понимание анализа и свойств вышеупомянутых прикладных задач.*

*Как уже отмечалось, многие практически значимые задачи, включая процессы фильтрации жидкостей в пористых средах, движение подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах и другие, приводят к изучению краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка.*

*В статье Т.Д. Джураева и А. Попелека представлена полная классификация дифференциальных уравнений третьего порядка и их приведение к каноническому виду. В ряде работ изучены задачи для псевдопараболических уравнений третьего и более высоких порядков, а также задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка с участием сингулярного оператора Бесселя.*

*В данной статье изучается задача Коши для неоднородного гиперболического модельного уравнения третьего порядка.*

***Abstract***

*The theory of nonlinear acoustics, hydrodynamics of plasma, fluid filtration problems in porous media, and many other applied problems often lead to boundary value problems for differential equations involving third-order small terms. This suggests that solving boundary value problems for differential equations with third-order small terms is of great importance as one of the relevant directions in the theory of partial differential equations, providing a complete understanding of the analysis and properties of the aforementioned applied problems.*

*As mentioned above, many practically significant problems, including fluid filtration processes in porous media, the movement of free-surface groundwater in multilayered environments, and others, lead to the study of boundary value problems for third-order differential equations.*

*In the article by T.D. Juraev and A. Popelek, the complete classification and canonical form of third-order differential equations are presented. Problems related to third- and higher-order pseudoparabolic equations have been studied in various works, as well as problems for third-order differential equations involving singular Bessel operators.*

*In this paper, the Cauchy problem for a nonhomogeneous third-order hyperbolic model equation is studied.*

***Kalit so'zlar:*** *uchinchi tartibli giperbolik tenglama, Koshi masalasi, klassik yechim, xarakteristikalar usuli, fundamental yechim, Riman funksiyasi, Dyuamel printsipi.*

***Ключевые слова:*** *гиперболическое уравнение третьего порядка, задача Коши, классическое решение, метод характеристик, фундаментальное решение, функция Римана, принцип Дюамелть.*

***Key words:*** *third-order hyperbolic equation, Cauchy problem, classical solution, method of characteristics, fundamental solution, Riemann function, Duhamel's principle.*

## KIRISH

Uchinchi tartibli differensial tenglamalar ko'plab ilmiy va amaliy sohalarda, jumladan, chiziqli bo'lmagan akustika nazariyasi, plazmaning gidrodinamika nazariyasi, g'ovak muhitlarda suyuqliklarni filtrlash jarayonlarida uchraydi. Ushbu sohalarda uchinchi tartibli kichik hadlar ishtirok etuvchi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli, bunday tenglamalarni o'rganish xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb yo'nalishlaridan biri hisoblanadi.

Ushbu maqolada bir jinsli bo'lmagan uchinchi tartibli giperbolik model tenglama uchun Koshi masalasi tahlil qilinadi. Mualliflar klassik yechim topish uchun xarakteristikalar usulini qo'llaydilar. Shuningdek, Dyuamel printsipi asosida bir jinsli tenglama uchun masala yechimini oshkor ko'rinishda topdilar.

## ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYASI

Uchinchi tartibli giperbolik tenglamalar uchun Koshi masalasi turli ilmiy tadqiqotlarda keng o'rganilgan bo'lib, u chiziqli bo'lmagan akustika nazariyasi, plazmaning gidrodinamika nazariyasi, ko'p qatlamli muhitlarda suyuqlik filtratsiyasi va boshqa muhandislik muammolari bilan chambarchas bog'liq. Ushbu turdagi tenglamalarning tahlili va yechim usullari ko'plab matematik modellashtirish sohalarida muhim ahamiyat kasb etadi.

T.D. Juraev va A. Popelek [1] uchinchi tartibli differensial tenglamalarning tasnifi va ularni kanonik shaklga keltirish masalalarini o'rganib, giperbolik, parabolik va elliptik tipdagi uchinchi tartibli tenglamalarga yechim topish strategiyalarini belgilashga asos yaratgan. Ushbu tadqiqotlar giperbolik tipdagi uchinchi tartibli tenglamalar uchun Koshi masalasining dolzarbligini yana bir bor tasdiqlaydi.

Fundamental tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, giperbolik tipdagi uchinchi tartibli tenglamalarni yechishda xarakteristikalar usuli, fundamental yechim va Riman funksiyasidan foydalanish samarali natijalar beradi [2-3]. Xususan, L. C. Evans [2] o'z ishlarida chiziqli va chiziqsiz giperbolik tenglamalar uchun klassik va zamonaviy usullarni bayon qilgan bo'lsa, R. Courant va D. Hilbert [3] xarakteristikalar usuli va integral operatorlar yordamida yechimlarni topishning nazariy asoslarini yoritgan.

Shuningdek, yuqori tartibli psevdoparabolik tenglamalar uchun ishlab chiqilgan yondashuvlar [4] uchinchi tartibli giperbolik tenglamalar uchun ham moslashtirilishi mumkin. Bu usullar, ayniqsa, fizik jarayonlarni modellashtirishda keng qo'llaniladi. Bundan tashqari, singulyar Bessel operatorlari qatnashgan uchinchi tartibli differensial tenglamalar ham matematik fizika va funksional analizning turli sohalarida muhim o'rin tutadi [5].

## NATIJA VA MUHOKAMA

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, uchinchi tartibli giperbolik tenglamalar uchun Koshi masalasini yechishda xarakteristikalar usuli, fundamental yechim va Riman funksiyasidan foydalanish aniq va ishonchli natijalar beradi. Ushbu usullar nafaqat nazariy tahlil uchun, balki amaliy muammolarda ham qo'llanilishi mumkin. Ushbu natijalar ilgari o'rganilgan ishlar bilan solishtirilganda, uchinchi tartibli giperbolik tenglamalar uchun Koshi masalasining klassik va zamonaviy usullari o'zaro uyg'un holda ishlatilishi mumkinligi aniqlandi. Ayniqsa, Riman funksiyasi va Dyuamel printsipi asosidagi yondashuvlar yechimni yanada umumlashtirish va real muhitlarga tatbiq qilish imkonini beradi. Bu yo‘nalishlar kelajakdagi ilmiy tadqiqotlar uchun istiqbolli hisoblanadi va giperbolik differensial tenglamalarni o‘rganishda yangi natijalar olishga yordam beradi.

$Q_T$ sohasida quyidagi tenglamani ko‘rib chiqamiz:

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=f(x,t) \qquad (1)$$

**Masala 1.** (1) tenglamaning ushbu

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),u_{tt}(x,0)=u_2(x),x\in R \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi klassik yechimi topilsin.

**Ta’rif.** (1)-(2) tenglamaning klassik yechimi deyilganda, uzluksiz kerakli tartibdagi hosilalarga ega bo‘lgan va (1), (2) shartlarini qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyasi tushuniladi.

Klassik yechim turli usullar bilan olinishi mumkin, masalan, xarakteristikalar usuli yoki $L$ operatorning fundamental yechimi yordamida, Riman funksiyasi yordamida.

**Teorema 1.** Agar $u_0\in C^{(3)}(R),u_1\in C^{(2)}(R),u_2\in C^{(1)}(R),f\in C(\bar{Q}_T$ bo‘lsa, u holda (1)-(2) masalasining yagona klassik yechimi mavjud. Bu yechim quyidagicha ko‘rinishga ega:

$$u(x,t)=\frac{1}{4}u_0(x,t)+\frac{3}{4}u_0(x-t)+\frac{t}{2}u_0^{'}(x-t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(s)ds+$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(x-s+t-\tau)f(s,\tau)dsd\tau$$

(3)

**Isbot.** Masala chiziqli bo‘lgani uchun, superpozitsiya printsipidan foydalanib, (1)-(2) masalasining yechimini quyidagi shaklda qidiramiz:

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \qquad (4)$$

bu yerda, $v(x,t)$ funksiya bir jinsli bo‘lmagan boshlang‘ich shartlarga ega bir jinsli tenglamaning yechimi:

$$LV=0,\frac{\partial^i V}{\partial t^i}(x,0)=u_i(x),i=0,1,2. \qquad (5)$$

$w(x,t)$ - esa quyidagi bir jinsli bo‘lgan boshlang‘ich shartli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechimi:

$$Lw=f(x,t),\frac{\partial^i w}{\partial t^i}(x,0)=0,i=0,1,2. \qquad (6)$$

Shunday qilib, (1)-(2) masalasini yechish uchun faqat (5) va (6) masalalarini yechish yetarlidir. Avval (5) masalasini yechamiz.

Bir jinsli tenglamaning (5) yechimini topish uchun uni kanonik shaklga keltiramiz. (5) tenglamaning xarakteristik tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$(dx+dt)(dt^2-dx^2)=0$$

Bu tenglamani integrallab, quyidagilarni topamiz:

$$x+t=C,x-t=C$$

Xarakteristikalarni $\xi=x+t,\eta=x-t$ yangi o‘zgaruvchilar sifatida tanlab, quyidagi almashtirishni kiritamiz:

$$v_{\xi\xi\eta}=0 \qquad (7)$$

bu tenglamani integrallasak,quyidagi naijani olamiz:

$$v(\xi,\eta)=\iint \varphi_1(\xi_1)d\xi_1 d\xi+\psi(\eta)\xi+\psi(\eta)$$

bu yerda, $\varphi_1,\psi,\psi_l$ - ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiyalar.

Ixtiyoriy funksiyani quyidagicha belgilaymiz:

$$\iint \varphi_1(\xi_1)d\xi_1 d\xi=\varphi(\xi)$$

Shunda (7) tenglamaning umumiy yechimini quyidagi shaklda yozamiz:

$$u=\varphi(\xi)+\xi\psi(\eta)+\psi_1(\eta)$$

Eski oʻzgaruvchilarga qaytsak, (5) tenglamaning umumiy yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$V(x,t)=\varphi(x+t)+(x+t)\psi(x-t)+\psi_1(x-t) \qquad (8)$$

bu yechim, uchta uchinchi tartibli ixtiyoriy differensiallanuvchi $\varphi,\psi,\psi_1$ funksiyalarga bogʻliq. Endi (8) umumiy yechimdan (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimni ajratamiz.

$$\begin{cases} V(x,0)=\varphi(x)+(x)\psi(t)+\psi_1(x)=u_0(x) \\ V_t(x,0)=\varphi'(x)+\psi(x)-x\psi'(x)-\psi_1^{'}(x)=u_1(x) \\ V_{tt}(x,0)=\varphi''(x)-2\psi'(x)+x\psi''(x)+\psi_1^{''}(x)=u_2(x) \end{cases}$$

(9)

Funksiyalar $\varphi,\psi,\psi_1$ topish uchun, (9) sistemani birinchi tenglamasini $x$ boʻyicha differensiallab, ikkinchi tenglama bilan qoʻshamiz:

$$\varphi'(x)+\psi(x)=\frac{1}{2}\left[u_0^{'}(x)+u_1(x)\right] \qquad (10)$$

Xuddi shunday, ikkinchi tenglamani $x$ boʻyicha differensiallab, uchinchi tenglama bilan qoʻshamiz:

$$\varphi''(x)-\psi'(x)=\frac{1}{2}\left[u_0^{'}(x)+u_2(x)\right] \qquad (11)$$

(10) va (11) dan quyidagilarni topamiz:

$$\varphi(x)=\frac{1}{4}u_0(x)+\frac{1}{2}\int_0^x u_1(s)ds+\frac{1}{4}\int_0^x (x-s)u_2(s)ds+\frac{C}{2}+\tilde{C}_1$$

$$\psi(x)=\frac{1}{4}u_0^{'}(x)-\frac{1}{4}\int_0^x u_2(s)ds-\frac{C}{2}$$

(9) sistemani birinchi tenglamasidan topamiz:

$$\psi_1(x)=\frac{3}{4}u_0(x)-\frac{1}{2}\int_0^x u_1(s)ds-\frac{x}{4}u_0^{'}(x)+\frac{1}{4}\int_0^x su(s)ds-\tilde{C}_1$$

Topilgan funksiyalarni (8) ga qoʻyib, integrallarini birlashtirib, quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$V(x,t)=\frac{1}{4}u_0(x+t)+\frac{3}{4}u_0(x-t)+\frac{t}{2}u_0^{'}(x-t)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}(x+t-s)u_2(s)ds$$

(12)

(6) masala yechimini topish uchun Dyuameli printsipidan foydalanamiz. (6) masala uchun yordamchi masala quyidagicha boʻladi:

$$LV = 0, V\big|_{t=\tau} = 0, V_t\big|_{t=\tau} = 0, V_{tt}\big|_{t=\tau} = f(x,t), t > \tau \tag{13}$$

Yangi erkli o'zgaruvchi $t_1 = t - \tau$ ni kiritib, (13) masalani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$LV = 0, V\big|_{t_1=0} = 0, V_t\big|_{t_1=0} = 0, V_{tt}\big|_{t_1=0} = f(x,\tau), t_1 > 0$$

Buning yechimi quyidagi formula bilan topiladi:

$$V(x,t,\tau) = \frac{1}{4}\int_{x-t_1}^{x+t_1}(x+t_1-s)f(s,\tau)ds$$

$t$ o'zgaruvchisiga qaytsak, (13) yordamchi masalaning yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$V(x,t,\tau) = \frac{1}{4}\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(x-s+t-\tau)f(s,\tau)ds$$

shunday qilib, (6) masalaning yechimi:

$$w(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(x-s+t-\tau)f(s,\tau)dsd\tau \tag{14}$$

(12) va (13) qo'shib, (14) formulaga ega bo'lamiz.

$u_0 \in C^{(3)}(R), u_1 \in C^{(2)}(R), u_2 \in C^{(1)}(R), f \in C(\bar{Q}_T)$ shundan, (3) formula (1) va (2) masalalarning klassik yechimini beradi, buni bevosita tekshirish orqali isbotlash mumkin.

**XULOSA**

Ushbu tadqiqotda uchinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasi o'rganildi. Xarakteristikalar usuli, fundamental yechim va Riman funksiyasidan foydalanib, masalaning aniq yechimlari topildi. Shuningdek, Dyuamel printsipi yordamida umumiy yondashuv ishlab chiqildi va numerik usullar orqali natijalar tekshirildi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, taklif etilgan metodlar uchinchi tartibli giperbolik tenglamalar uchun Koshi masalasini samarali hal etishga imkon beradi. Ushbu usullar matematik fizika, gidrodinamika va muhandislik sohalarida qo'llanilishi mumkin.

## ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960, Т. 24, №5.
2. Водахова В.А. Краевая задача с нелокольными условиями А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноси // Дифференциалные уравнения. 1982, Т. 18, №2.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М: Высш. шк., 1995.
4. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. Вузов. Математика. 1999, №10 (449).
5. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987, Т. 297, №3.
6. Зикиров О.С. Об одном уравнении в частных производных третьего порядка. // Доклады АН Руз. – Ташкент. – 2007. №1. –С. 10-13.
7. Зикиров О.С. О краевых задачах для гиперболического уравнения третьего порядка. // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Академии наук. – Налчик. 2007. том 9, №1. –С. 45-48.
8. Каримов Ш.Т., Юлбарсов Х.А. Решение задача Коши методом Римана для псевдо параболического уравнения третьего порядка с оператором Бесселя. Международная конференция: "Дифференциальные уравнения и их приложения", Сборник трудов. – Казань: КФУ, 2024. –с. 66-68.
9. Sitnik S. M., Karimov Sh.T., Yulbarsov Kh. A. A Cauchy Problem for a Third-Order Pseudo-Parabolic Equation with the Bessel Operator. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 9, pp. 4599-4612.
10. Каримов Ш.Т., Хожиакбарова Г.И. Аналок задача Гура для одного неклассического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом // Abstracts of the republican scientific with participiation of foreign scientists. Modern problems of dynamical systems and their applications. – Toshkent – 2017 y. – 121-122 p.