O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR

1995-yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2025
ANIQ FANLAR

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

MATEMATIKA

FIZIKA-TEXNIKA

ILMIY AXBOROT

FarDU. Ilmiy xabarlar – Scientific journal of the Fergana State University

Volume 31 Issue 2, 2025-yil DOI: 10.56292/SJFSU/vol31_iss2/a165

UO‘K: 514.75

GALILEY TEKISLIGIDA TRIGONOMETRIYA

ТРИГОНОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ ГАЛИЛЕЯ

TRIGONOMETRY ON THE GALILEO PLANE

Mamadaliev Botirjon Mullaaminovich[1]
[1]Farg‘ona davlat universiteti, f-.m.f.b.f.d., (PhD)

Topvoldiyev Kamronbek Rustamjon o‘g‘li[2]
[2]Farg‘ona davlat universiteti, talabasi

Abduraximov Ilyosbek Safarali o‘g‘li[3]
[3]Farg‘ona davlat universiteti, talabasi

Annotatsiya

Ushbu maqolada Galiley tekisligidagi trigonometriya yoki parabolik trigonometriyaning Yevklid tekisligidagi trigonometriya xossalariga o‘xshash xossalari o‘rganilgan. Trigonometrik funksiyalarni aniqlashda, burchak va funksiyalar orasidagi bog‘lanishlar teorema va tasdiqlar yordamida isbotlangan.

Аннотация

В данной статье рассматриваются свойства тригонометрии на плоскости Галилея или параболическая тригонометрия, которая аналогична свойствам тригонометрии на плоскости Евклида. При определении тригонометрических функций связь между углами и функциями доказываются с помощью теорем и утверждений.

Abstract

This article discusses the properties of trigonometry on the Galilean plane or parabolic trigonometry, which is similar to the properties of trigonometry on the Euclidean plane. When defining trigonometric functions, the relationship between angles and functions is proven using theorems and statements.

Kalit so‘zlar: *Galiley tekisligi, affin tekisligi, parabolik trigonometriya, trigonometrik funksiyalar, absissa, ordinata.*

Ключевые слова: *Галилеева плоскость, аффинная плоскость, параболическая тригонометрия, тригонометрические функции, абсцисса, ордината.*

Key words: *Galilean plane, affine plane, parabolic trigonometry, trigonometric functions, abscissa, ordinate.*

KIRISH

Galiley tekisligi affin tekisligi bo‘lib, unda ikki nuqta orasidagi masofa, nuqtalarning absissa o‘qidagi proyeksiyasi sifatida aniqlanadi. Agar absissa o‘qidagi proyeksiya nolga teng bo‘lsa, masofa nuqtaning ordinata o‘qdagi proyeksiyasiga teng. Shuning uchun ordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar Galiley tekisligining maxsus chiziqlari deb ataladi.

Yevklid tekisligida aylanani, berilgan kesma bir xil burchak ostida ko‘rinadigan nuqtalarning geometrik o‘rni shaklida ham aniqlash mumkin. Agar Galiley tekisligida bu ta’rifni qanoatlantiradigan nuqtalarning geometrik o‘rnini qarasak, u simmetriya o‘qi maxsus to‘g‘ri chiziq bo‘lgan paraboladir.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Yarimyevklid fazosida “to‘la geometriya” masalalari birinchi bo‘lib A.Artikbayev ishlarida paydo bo‘ldi. U yerda asosan geometriyaning “to‘la geometriya” geometriyasidagi ko‘plab klassik masalalar ajraluvchi metrikali fazoda qaralgan. Psevdoyevklid fazoda ko‘plab masalalar yarimyevklid fazolarning izotrop geometriyasi bilan bog‘liq va bu izotrop geometriya yarimyevklid fazo geometriyasi bo‘ladi [1], [4].

Yevklid tekisligida aylanani, berilgan kesma bir xil burchak ostida koʻrinadigan nuqtalarning geometrik oʻrni shaklida ham aniqlash mumkin. Agar Galiley tekisligida bu ta'rifni qanoatlantiradigan nuqtalarning geometrik oʻrnini qarasak, u simmetriya oʻqi maxsus toʻgʻri chiziq boʻlgan Yevklid tekisligidagi parabolaga oʻxshash chiziqdir [3]-[5].

Trigonometriya (yunoncha "trugunon" - "uchburchak", "metriya"- "oʻlchash") - matematikaning trigonometrik funksiyalarining xossalari, uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlarni oʻrganuvchi boʻlimidir. Muhammad al-Xorazmiy, Abu Rayhon Beruniy, Nasriddin Tusiy asarlarida trigonometriyaga asos solingan. Sinuslar, kosinuslar, tangenslar teoremalari trigonometriyaning asosiy natijalaridan hisoblanadi. Trigonometriya amaliy tatbiqlarga ega va matematikada muhim rol oʻynaydi. Hozirgi kundagi belgilashlar L.Eyler asarlarida shakllangan [2].

Biz ushbu maqolada Galiley tekisligida trigonometriya yoki parabolik trigonometriyaning Yevklid tekisligidagi trigonometriya xossalariga oʻxshash xossalarini koʻrsatamiz.

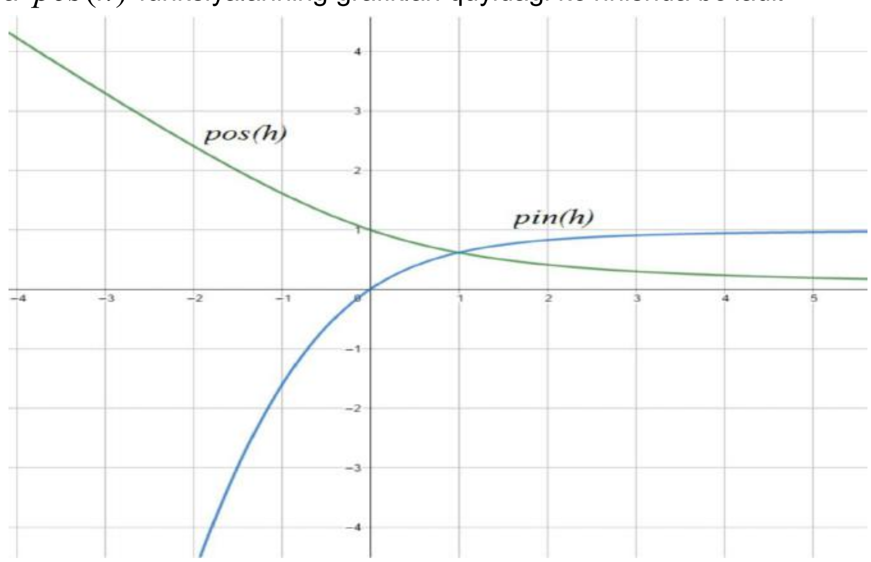
NATIJA VA MUHOKAMALAR

Dastlab, Galiley tekisligida trigonometrik funksiyalarni kiritaylik. Galiley tekisligida aylana Yevklid tekisligidagi parabolaga oʻxshash chiziq boʻlgani uchun u parabolik trigonometriya deb ham ataladi. Bu tekislikda trigonometriyani Galiley ma'nosidagi burchak kattaligi sifatida beramiz.

Ta'rif 1. h burchakning $pin(h)$ $\left(pos(h)\right)$ deb, $(1,\ 0)$ nuqtani h burchakka burishda hosil boʻlgan nuqtaning koordinatalar boshi bilan tutashtiruvchi toʻgʻri chiziq va $x^2+y=1$ aylana kesishishidan hosil boʻlgan nuqtaning ordinatasiga (absissasiga) aytiladi.

Ta'rif 2. h burchakning $ptg(h)\left(cth(h)\right)$ deb, $(1,\ 0)$ nuqtani h burchakka burishda hosil boʻlgan nuqtaning koordinatalar boshi bilan tutashtiruvchi toʻgʻri chiziq va $x^2+y=1$ aylana kesishishidan hosil boʻlgan nuqtaning ordinatasining absissasiga (absissasining ordinatasiga) nisbatiga aytiladi.

$pin(h)$ va $pos(h)$ funksiyalarining grafiklari quyidagi koʻrinishda boʻladi.



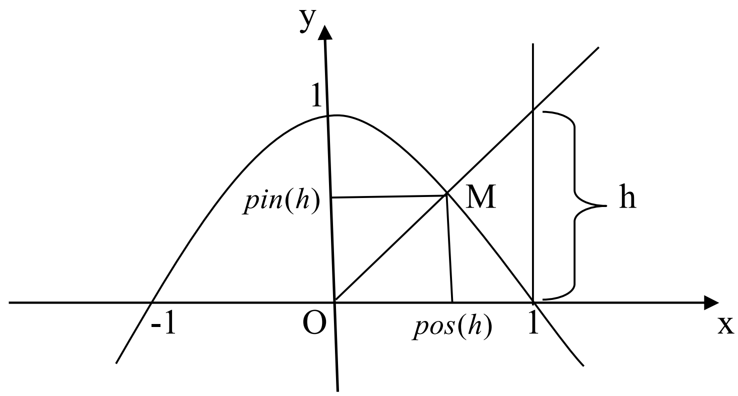
1-rasm.

1-rasmdagi grafikdan koʻrinib turibdiki, $pos(0)=1$, $pin(0)=0$.

Yuqoridagi ta'riflardan foydalanib $pin(h)$, $pos(h)$, $ptg(h)$ va $cth(h)$ funksiyalarning formulalarini keltirib chiqaraylik.

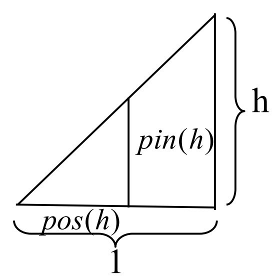
Buning uchun $x^2+y=1$ aylanadan biror $M(x,y)$ nuqta olib, bu nuqtaning Ox o'qidagi proyeksiyasini $pos(h)$ va Oy o'qidagi proyeksiyasini esa $pin(h)$ ga teng deb olamiz, ya'ni $pos(h)=x$, $pin(h)=y$. $x^2+y=1$ dan quyidagi munosabatni hosil qilamiz

$$pos^2(h)+pin(h)=1 \tag{1}$$



2-rasm.

2-rasmdagi grafikdan uchburchakni kesib olib, uchburchakning o'xshashlik alomatiga ko'ra quyidagi ifodaga ega bo'lamiz.



3-rasm.

$$\frac{h}{1}=\frac{pin(h)}{pos(h)} \qquad pin(h)=h\cdot pos(h) \tag{2}$$

Bu tenglikni yuqoridagi (1) formulaga qo'ysak, $pos^2(h)+pin(h)=1$ ko'rinishni oladi. Unga (2) tenglik bilan aniqlangan $pin(h)$ qiymatini qo'ysak,

$$pos^2(h)+h\cdot pos(h)-1=0$$

$pos(h)$ ga bog'liq kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan kvadrat tenglamaning ildizlarini topaylik,

$$pos(h)_{1,2}=\frac{-h\pm\sqrt{h^2+4}}{2}.$$

Kvadrat tenglamaning ikkita haqiqiy va turli ishorali ildizlari mavjud ekan. Biz $pos(h)$ ni Ox o'qining musbat tarafida ekanligini hisobga olgan holda kvadrat tenglamaning musbat yechimini olamiz, ya'ni

$$pos(h)=\frac{-h+\sqrt{h^2+4}}{2}.$$

Hosil bo‘lgan tenglikni soddalashtiraylik,

$$pos(h)=\frac{\left(\sqrt{h^2+4}-h\right)\left(\sqrt{h^2+4}+h\right)}{2\left(\sqrt{h^2+4}+h\right)}=\frac{h^2+4-h^2}{2\left(\sqrt{h^2+4}+h\right)}=\frac{2}{\sqrt{h^2+4}+h}$$

Demak, $pos(h)$ ning qiymati

$$pos(h)=\frac{2}{\sqrt{h^2+4}+h} \tag{3}$$

ko‘rinishida, (2) formulaga ko‘ra $pin(h)$ ning qiymati esa

$$pin(h)=\frac{2h}{\sqrt{h^2+4}+h} \tag{4}$$

ko‘rinishida bo‘lar ekan.

Shuningdek, (3) va (4) tengliklardan quyidagi formulalar o‘rinli bo‘ladi,

$$ptg(h)=\frac{pin(h)}{pos(h)}=h \tag{5}$$

$$cth(h)=\frac{pos(h)}{pin(h)}=\frac{1}{h} \tag{6}$$

$$ptg(h)\cdot cth(h)=1 \tag{7}$$

Tasdiq 1. $pin(h)$ (yoki $pos(h)$) funksiyada h cheksizlikka intilganda $pin(h)$ (yoki $pos(h)$) ning qiymati 1 (yoki 0) ga intiladi, ya’ni

$$pin(\infty)=1,\ pos(\infty)=0.$$

Isbot. (4) tenglikdan foydalanib, $h\to\infty$ intilganda limitga o‘tsak,

$$\lim_{h\to\infty} pin(h)=\lim_{h\to\infty}\frac{2h}{\sqrt{h^2+4}+h}=\lim_{h\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{h^2}}+1}=\frac{2}{2}=1$$

$pin(h)$ qiymati $h\to\infty$ intilganda 1 ga teng ekan.

Yuqoridagi (3) tenglikdan $pos(h)$ $h\to\infty$ intilganda limitga o‘tsak,

$$\lim_{h\to\infty} pos(h)=\lim_{h\to\infty}\frac{2}{\sqrt{h^2+4}+h}=0$$

bo‘ladi. ∇

Parabolik trigonometriyaning afzalligi, Evklid tekisligidagi trigonometriyada $\forall\, m\in R$ uchun $\sin(m\cdot\alpha)$ va $\cos(m\cdot\alpha)$ larning $\sin\alpha$ va $\cos\alpha$ lar orqali aniqlash uchun oshkor formulasi yo‘q.

Tasdiq 2. Galiley tekisligi trigonometriyasida $pin(\alpha\cdot h)$ va $pos(\alpha\cdot h)$ larning $pin(h)$ va $pos(h)$ lar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$pos(\alpha\cdot h)=\frac{-\alpha\cdot pin(h)+\sqrt{\alpha^2\cdot pin^2(h)+4\cdot pos^2(h)}}{2\cdot pos(h)} \tag{8}$$

$$pin(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha^2 \cdot h \cdot pin(h) + \alpha \cdot h \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot pin^2(h) + 4 \cdot pos^2(h)}}{2 \cdot pos(h)} \quad (9)$$

$$pin(\alpha \cdot h) = \alpha \cdot h \cdot pos(\alpha \cdot h) \quad (10)$$

Isbot. Bu (8), (9), va (10) formulalarni isbotlashda yuqorida isbotlangan (2), (3) va (4) formulalardan foydalanamiz. Buning uchun

$$pos(h) = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4}}{2}$$

tenglikdagi h ning o‘rniga $\alpha \cdot h$ ni qo‘ysak,

$$pos(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha \cdot h + \sqrt{\alpha^2 \cdot h^2 + 4}}{2}$$

hosil bo‘ladi. Bu tenglikdagi h ning o‘rniga $\frac{pin(h)}{pos(h)} = h$ qo‘yib uni soddalashtirsak,

$$pos(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha \cdot \frac{pin(h)}{pos(h)} + \sqrt{\alpha^2 \cdot \left(\frac{pin(h)}{pos(h)}\right)^2 + 4}}{2} =$$

$$= \frac{-\alpha \cdot pin(h) + \sqrt{\alpha^2 \cdot pin^2(h) + 4 \cdot pos^2(h)}}{2 \cdot pos(h)} \text{ yoki}$$

$$pos(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha \cdot pin(h) + \sqrt{\alpha^2 \cdot pin^2(h) + 4 \cdot pos^2(h)}}{2 \cdot pos(h)}$$

ko‘rinishdagi (8) formula hosil qilamiz.

Endi (9) formulani isbotlaylik. Buning uchun yuqorida aniqlagan quyidagi

$$pin(h) = \frac{-h^2 + h \cdot \sqrt{h^2 + 4}}{2}$$

tenglikdan foydalanamiz. Yuqoridagi kabi bu tenglikdagi h ning o‘rniga $\alpha \cdot h$ ni qo‘ysak,

$$pin(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha^2 \cdot h^2 + \alpha \cdot h \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot h^2 + 4}}{2}$$

ni hosil qilamiz va h ning o‘rniga $\frac{pin(h)}{pos(h)} = h$ qo‘ysak,

$$pin(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha^2 \cdot \left(\frac{pin(h)}{pos(h)}\right)^2 + \alpha \cdot \frac{pin(h)}{pos(h)} \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot \left(\frac{pin(h)}{pos(h)}\right)^2 + 4}}{2} =$$

$$= \frac{-\alpha^2 \cdot h \cdot pin(h) + \alpha \cdot h \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot pin^2(h) + 4 \cdot pos^2(h)}}{2 \cdot pos(h)}$$

$$pin(\alpha \cdot h) = \frac{-\alpha^2 \cdot h \cdot pin(h) + \alpha \cdot h \cdot \sqrt{\alpha^2 \cdot pin^2(h) + 4 \cdot pos^2(h)}}{2 \cdot pos(h)}$$

ko‘rinishdagi (9) formulani hosil qilamiz.

Shuningdek, (10) formula ham quyidagicha isbotlanadi. Buning uchun yuqorida aniqlagan (2) formuladagi h ning o‘rniga $\alpha \cdot h$ ni qo‘yadigan bo‘lsak, (2) formula

$$pin(\alpha \cdot h) = \alpha \cdot h \cdot pos(\alpha \cdot h).$$

(10) ko‘rinishdagi formulaga keladi. ∇

Galiley tekisligidagi trigonometrik funksiyalarining xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1-xossa. Galiley tekisligidagi $pin(h)$ va $pos(h)$ trigonometrik funksiyalar davriy emas.

2-xossa. Galiley tekisligidagi $pin(h)$ va $pos(h)$ trigonometrik funksiyalari toq ham, juft ham emas.

Teorema. Galiley tekisligida $pin(h)$ va $pos(h)$ trigonometrik funksiyalar uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ pin(h) + pin(-h) = -h^2, \\ 2)\ pos(h) - pos(-h) = -h, \\ 3)\ pos(h) \cdot pos(-h) = 1, \\ 4)\ pin(h) \cdot pin(-h) = -h^2. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Isbot. (11) tengliklarni isbotlashda yuqoridagi (3) va (4) formulalardan foydalanamiz.

1) Dastlab, $pin(h)$ va $pin(-h)$ larni qiymatlarini aniqlaylik,

$$pin(h) = \frac{\sqrt{h^2+4} - h}{2} \cdot h = \frac{h\sqrt{h^2+4} - h^2}{2} \text{ va}$$

$$pin(-h) = \frac{\sqrt{h^2+4} - (-h)}{2} \cdot (-h) = \frac{-h\sqrt{h^2+4} - h^2}{2}.$$

Bu ikki ifodani qo‘shadigan bo‘lsak,

$$pin(h) + pin(-h) = \frac{h\sqrt{h^2+4} - h^2}{2} + \frac{-h\sqrt{h^2+4} - h^2}{2} = -h^2$$

$pin(h) + pin(-h) = -h^2$ hosil bo‘ladi va birinchi tenglik isbotlanadi.

2) $pos(h) = \frac{\sqrt{h^2+4} - h}{2}$ va $pos(-h) = \frac{\sqrt{h^2+4} + h}{2}$ deylik. Bu ikki ifodani bir-biridan ayirsak,

$$pos(h) - pos(-h) = \frac{\sqrt{h^2+4} - h}{2} - \frac{\sqrt{h^2+4} + h}{2} = -h$$

$$pos(h) - pos(-h) = -h$$

hosil bo‘ladi. Bu esa bizga ikkinchi tenglikni isbotini beradi.

3) Endi uchinchi tennlikni isbotlaymiz. Buning uchun $pos(h) = \frac{\sqrt{h^2+4} - h}{2}$ va $pos(-h) = \frac{\sqrt{h^2+4} + h}{2}$ larni aniqlab, bu ikki ifodani bir-biriga ko‘paytirsak,

$$pos(h)\cdot pos(-h)=\left(\frac{\sqrt{h^2+4}-h}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{h^2+4}+h}{2}\right)=\frac{h^2+4-h^2}{4}=1$$

$$pos(h)\cdot pos(-h)=1$$

hosil boʻladi va uchinchi tenglikni ifodalaydi.

4) Va nihoyat oxirgi toʻrtinchi tenglikni isbotlaylik. Buning uchun ham yuqorida bajargan ishlarimiz kabi $pin(h)=\dfrac{h\sqrt{h^2+4}-h^2}{2}$ va $pin(-h)=\dfrac{-h\sqrt{h^2+4}-h^2}{2}$ larni aniqlab, bu ikki ifodani koʻpaytirsak,

$$pin(h)\cdot pin(-h)=\left(\frac{h\sqrt{h^2+4}-h^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{-h\sqrt{h^2+4}-h^2}{2}\right)=$$

$$=-\left(\frac{h^2(h^2+4)-h^4}{4}\right)=-\left(\frac{h^4+4h^2-h^4}{4}\right)=-h^2$$

$$pin(h)\cdot pin(-h)=-h^2$$

hosil boʻladi va toʻrtinchi tenglik isbotlandi. Teorema isbotlandi.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda Galiley tekisligida trigonometriya Evklid tekisligidagi trigonometriyadan farq qilar ekan. Chunki bu tekislikning aylanasi Evklid tekisligidagi parabola shaklida boʻlar ekan. Shuning uchun bu parabolik trigonometriya deb ham aytilar ekan. Yuqorida keltirilgan teorema va tasdiqlar Galiley tekisligidagi trigonometrik funksiyalarni aniqlashda, burchaklar va funksiyalar oʻrtasidagi oʻzaro bogʻlanishlarni matematik formulalar orqali ifodalash imkonini beradi. Bu esa oʻquvchilarning Galiley geometriyasiga boʻlgan qiziqishlarini kuchaytiradi.

ADABIYOTLAR ROʻYXATI

1. A. Artikbayev, I. Xatamov. “Tekislikda toʻqqiz geometriya”. «Fan». Tashkent, 2021 yil, 124 bet.

2. G. Dattoli, M. Migliorati, M. Quattromini and P. E. Riccii "The Parabolic-Trigonometric Functions"ENEA, Tecnologie Fisiche e Nuovi Materiali, Centro Ricerche Frascati Frascati, Rome, Italy 2008 p.

3. Хачатурян А.В. Геометрия Галилея. – М.: Библиотека “Матиматическое просвещение”, 2005 г, 148 стр.

4. Артикбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве времени. Ташкент, Наука, (1991), - 180 стр.

5. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. Москва, Наука, (1969), - 548 стр.