ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

— 6-2019 —

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

ИЛМИЙ АХБОРОТ

ФАНИМИЗ ФИДОЙИЛАРИ

БИБЛИОГРАФИЯ

УДК:51+512.25+517.3

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН КЎП НУҚТАЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

A MULTI-POINT BOUNDARY PROBLEM FOR A SIMPLE DIFFERENTIAL EQUATION OF A FIRST ORDER LINEAR

Г.Тиллабаева

Аннотация

Мақолада биринчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама учун кўп нуқтали чегаравий масала ечимининг топиш усули баён қилинган.

Аннотация

В статье описывается способ нахождениярешения многоточечной краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Annotation

In this article, explaining a method of solving the problem for a multi-point boundary problem for a simple differential equation of a first order linear s given.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, чегаравий масала, бир қийматли ечиш.*

Ключевые слова и выражения: *обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, однозначная разрешимость.*

Keywords and exspressions: *a simple differential equation, boundary problem, one value solution.*

Бизга $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ кесмада аниқланган ва узлуксиз $A(x)$ ва $B(x)$ функциялар берилган бўлсин. У ҳолда, маълумки $[1,192]$

$$y' + A(x)y = B(x)$$

чизиқли дифференциал тенгламанинг $y(a) = k_1$ шартни қаноатлантирувчи ягона ечими мавжуд. Бу ечим бошқа бир, масалан, $y(b) = k_2$ шартни қаноатлантириши ҳам, қаноатлантирмаслиги ҳам мумкин. Бунинг геометрик маъноси, берилган дифференциал тенгламанинг (a,k_1) нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғи (b,k_2) нуқтадан ўтиши ҳам, ўтмаслиги ҳам мумкин. Албатта, қаралаётган дифференциал тенгламага қўйилган масаланинг интеграл чизиғи бошқа бир ёки бир неча нуқтадан ўтишини аниқлаш ҳам муҳим масаладир. Қуйида биз ана шундай хоссага эга бўлган икки тенглама ва уларга мос ечимни топишнинг бир усулини кўрсатамиз.

$P(x)$ ва $Q(x)$ - $[a,b]$ да аниқланган функциялар, k_j , $j=\overline{0,n}$, x_j , $j=\overline{1,n-1}$ берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^n$ -номаълум кўпҳад, яъни a_j , $j=\overline{0,n-1}$ -номаълум ҳақиқий сонлар бўлсин.

У ҳолда ушбу тенглама

$$y' + P(x)y = q(x)\cdot Q(x) \text{ , } x \in (a,b) \quad (1)$$

учун қуйидаги кўп нуқтали чегаравий масалани қўйиш мумкин.

Масала. $q(x)$ кўпҳад шундай аниқлансинки, (1) дифференциал

Г.Тиллабаева – *ФарДУ физика-математика факультети математика ўқитиш методикаси йўналиши талабаси.*

тенгламанинг

$$y(a)=k_0\,,\ y(x_1)=k_1,\ \dots\ y(x_{n-1})=k_{n-1}\ ,\ y(b)=k_n \quad (2)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

Ечиш. Маълумки $[1,192]$, агар $q(x)$ ни маълум функция деб ҳисобласак, (1) тенгламанинг $y(a)=k_0$ шартни қаноатлантирувчи ягона ечими мавжуд ва у

$$y(x)=e^{-\int\limits_a^x P(z)dz}\left[\int\limits_a^x q(t)\cdot Q(t)\cdot e^{\int\limits_a^t P(z)dz}dt+k_0\right] \quad (3)$$

формула билан аниқланади.

(3) функцияни (2) шартларнинг қолган n та шартига бўйсундирайлик:

$$y(x_j)=e^{-\int\limits_a^{x_j} P(z)dz}\left[\int\limits_a^{x_j} q(t)\cdot Q(t)\cdot e^{\int\limits_a^t P(z)dz}dt+k_0\right]=k_j\,,\ j=\overline{1,n}\,.$$

Бу тенгликларни $q(t)$ кўпҳаднинг ёйилмасидан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{m=0}^{n-1}a_m\cdot e^{-\int\limits_a^{x_j} P(z)dz}\cdot\int\limits_a^{x_j} t^m\cdot Q(t)\cdot e^{\int\limits_a^t P(z)dz}dt=k_j-k_0\cdot e^{-\int\limits_a^{x_j} P(z)dz}\ ,\ j=\overline{1,n}\,. \quad (4)$$

(4)- a_m , $m=\overline{0,n-1}$ номаълум коэффициентларга нисбатан n номаълумли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилади.

Бу системанинг асосий детерминантини Δ билан белгилайлик, яъни

$$\Delta=\left|e^{-\int\limits_a^{x_j} P(z)dz}\cdot\int\limits_a^{x_j} t^m\cdot Q(t)\cdot e^{\int\limits_a^t P(z)dz}dt\right|_{m=\overline{0,n-1}}^{j=\overline{1,n}}\,,$$

Δ_m билан эса Δ нинг m -устуни $k_m-k_0\cdot e^{-\int\limits_a^{x_m} P(z)dz}$, $m=\overline{1,n}$ билан алмаштирилган детерминантни белгилайлик. У ҳолда, чизиқли алгебраик тенгламалар назариясига $[2,732]$ асосан қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин.

1. $\Delta\neq 0$. Унда (4) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади. Бу ердан топилган a_m , $m=\overline{0,n-1}$ ларни (3) формулага қўйиб, масаланинг ягона ечимига эга бўламиз.

2. $\Delta\equiv 0$, $\Delta_m\equiv 0$, масалан, $k_j=k_0\cdot e^{-\int\limits_a^{x_j} P(t)dt}$, $j=\overline{1,n}$. Унда (4) тенгламалар системаси чексиз кўп ечимларга эга бўлади ва a_m , $m=\overline{0,n-1}$ сифатида ихтиёрий ҳақиқий сонни олиш мумкин. Демак, (3) формулада $q(t)$ ўрнига ихтиёрий n -даражали кўпҳадни қўйиб, масаланинг чексиз кўп ечимига эга бўламиз.

3. $\Delta\equiv 0$, $\Delta_s\neq 0$, бу ерда $s\in N$, $1\le s\le n$.

Бунда (4) тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди. Демак, $\{(1),(2)\}$ масаланинг ечими ҳам мавжуд эмас, яъни ҳар қандай $q(t)$ кўпҳад олинганда ҳам (1) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлмайди.

Эндибиринчи тартибли чизиқли ушбу дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$y'+P(x)y=\sum_{y=1}^{n}q_j\cdot Q_j(x),\ x\in(a,b), \tag{5}$$

бу ерда $P(x)$, $Q_j(x)$, $j=\overline{1,n}$ - берилган узлуксиз функциялар, q_j, $j=\overline{1,n}$ - номаълум параметрлар.

Масала. $q_1,q_2,...,q_n$- номаълум параметрларнинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

Ечиш. (5) тенгламанинг (2) шартларнинг биринчисини қаноатлантирувчи ечимини ушбу кўринишда ёзиш мумкин [1,192]

$$y(x)=e^{-\int_a^x P(z)dz}\left[\sum_{j=1}^{n}q_j\cdot\int_a^x Q_j(t)e^{\int_a^t P(z)dz}dt+k_0\right]. \tag{6}$$

(6) функцияни (2) шартларнинг охирги *n* тасига бўйсундирайлик:

$$y(x_m)=e^{-\int_a^{x_m} P(z)dz}\left[\sum_{j=1}^{n}q_j\int_a^{x_m} Q_j(t)e^{\int_a^t P(z)dz}dt+k_0\right]=k_m,\quad m=\overline{1,n}.$$

Бу тенгликни қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n}q_j\cdot\int_a^{x_m} Q_j(t)e^{\int_{x_m}^t P(z)dz}dt=k_m e^{\int_a^{x_m} P(z)dz}-k_0,\ m=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Агар қуйидаги белгилашларни киритсак,

$$A_{j_m}=\int_a^{x_m} Q_j(t)e^{\int_{x_m}^t P(z)dz}dt,\ j,m=\overline{1,n},\ B_m=k_m e^{\int_a^{x_m} P(z)dz}-k_0,\ m=\overline{1,n},$$

у ҳолда (7) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n}A_{jm}q_j=B_m,\ m=\overline{1,n}, \tag{8}$$

(8) - q_j, $j=\overline{1,n}$ га нисбатан *n* номаълумли *n* та тенгламалар системаси бўлиб, унинг асосий детерминанти қуйидагидан иборат:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_{11},A_{12},...,A_{1n} \\ A_{21},A_{22},...,A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1},A_{n2},...,A_{nn} \end{vmatrix}$$

У ҳолда (8) тенгламалар системаси учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\Delta\neq 0$. У ҳолда (8) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади.

2) $\Delta = 0$, $\Delta_j = 0$, бу ерда Δ_j детерминант Δ даги j устун элементларини B_m , $m = \overline{1,n}$ сонлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминант. У ҳолда (8) тенгламалар системаси чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

3) $\Delta = 0$, $\Delta_s \neq 0$, бу ерда $s = const \in N$ ва $1 \leq s \leq n$. У ҳолда (8) тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди.

1) ва 2) ҳолларда (8) тенгламалар системасидан топилган q_j , $j = \overline{1,n}$ ларни (6) формулага қўйиб, {(5),(2)} масаланинг ечимига эга бўламиз.

Юқоридагилардан қуйидаги хулоса келиб чиқади: {(5),(2)} масала $\Delta \neq 0$ бўлганда ягона ечимга, $\Delta = 0$, $\Delta_j = 0$, $j = \overline{1,n}$ тенгликлар бажарилганда эса чексиз кўп ечимларга эга.

Адабиётлар:

1. Бойқузиев Қ.Б. Дифференциал тенгламалар. – Т.:Ўқитувчи, 1983.
2. Курош А.К. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор)