ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2019

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.955

БЕССЕЛЬ ОПЕРАТОРИ ҚАТНАШГАН ИТЕРАЦИЯЛАНГАН КЎП ЎЛЧОВЛИ КЛЕЙН-ГОРДОН-ФОК ТЕНГЛАМАСИ УЧУН КОШИ МАСАЛАСИ АНАЛОГИНИ ЕЧИШ

РЕШЕНИЕ АНАЛОГА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИТЕРИРОВАННОГО МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

SOLUTION OF AN ANALOGUE OF THE CAUCHY PROBLEM FOR AN ITERATED MULTIDIMENSIONAL KLEIN-GORDON-FOCK EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR

А.Ўринов, Ш.Каримов

Аннотация

Мақолада вақт ўзгарувчисига боғлиқ бўлган Бессель оператори қатнашган итерацияланган Клейн-Гордон-Фок тенгламаси учун Коши масаласи аналоги тадқиқ этилган. Умумлашган Эрдейи-Кобер операторини қўллаб қўйилган масала политўлқин тенгламаси учун Коши масаласига олиб келинган. Политўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечими сферик ўрта қиймат усули ёрдамида ошкор кўринишда қурилиб, унинг асосида қўйилган масала ечимининг интеграл кўриниши топилган.

Аннотация

Исследован аналог задачи Коши для итерированного многомерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя, зависящим от времени. Применяя обобщенный оператор Эрдейи-Кобера, поставленная задача сведена к задаче Коши для поливолнового уравнения. Методом сферического среднего построена явная формула решения задачи Коши для поливолнового уравнения, и на основе этого решения найдено интегральное представление решения поставленной задачи.

Annotation

An analogue of the Cauchy problem for an iterated multidimensional Klein-Gordon-Fock equation with a time-dependent Bessel operator has been investigated. Applying the generalized Erdélyi-Kober operator the formulated problem has been reduced to the Cauchy problem for the polywave equation. Applying a spherical mean method, an explicit formula for solving this problem for the polywave equation is constructed and based on this solution, an integral representation of the solution of the formulated problem is found.

Таянч сўз ва иборалар: *Коши масаласи, Клейн-Гордон-Фок тенгламаси, умумлашган Эрдейи-Кобер оператори, Бессель оператори.*

Ключевые словаи выражения: *задача Коши, уравнение Клейна-Гордона-Фока, обобщенный оператор Эрдейи-Кобера, оператор Бесселя.*

Keywords and expressions: *Cauchy problem, Klein-Gordon-Fock equation, generalized Erdélyi-Kober operator, Bessel operator.*

1. Введение. Постановка задачи.

Предметом исследования статьи является решение аналога задачи Коши для итерированного многомерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя

$$L_{\gamma,\lambda}^{m}(u) \equiv \left(B_{\gamma}^{t} - \Delta_x + \lambda^2\right)^m u = 0\,, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad \left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0} = 0,\ x \in R^n,\ k = \overline{0,m-1} \tag{2}$$

или

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = 0, \quad t^{2\gamma+1}\left.\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0} = \psi_k(x),\ x \in R^n,\ k = \overline{0,m-1}, \tag{3}$$

где $u = u(x,t)$, $x \in R^n$, $t \in [0,\infty)$, $m \in N$, $L_{\gamma,\lambda}^{m} = L_{\gamma,\lambda}\left(L_{\gamma,\lambda}^{m-1}\right)$, $B_{\gamma}^{t} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ -оператор Бесселя, $\Delta_x \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ - оператор Лапласа, $\gamma, \lambda \in R$, $\gamma > -1/2$, $\varphi_k(x)$ и

А.Уринов *– доктор физика–математических наук, профессор ФерГУ.*

Ш.Каримов *– доктор физика–математических наук, доцент ФерГУ.*

$\psi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ - заданные дифференцируемые функции.

Уравнение (1) при $m=1$ и $\gamma=-1/2$ переходит в уравнение Клейна-Гордона-Фока, которое является релятивистской версией уравнения Шрёдингера и представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка. Оно описывает динамику релятивистской квантовой системы [1]. Кроме того, она является обобщением волнового уравнения, подходящего для описания без массовых скалярных и векторных полей.

Когда $\lambda=0$, в работах [2,1020-1028], [3,247-255] получено представление решения поставленной задачи Коши. При этом решение конструировано, используя решение задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД). Последнее основано на том факте, что среднее сферическое достаточно гладкой функции удовлетворяет уравнению Дарбу [4,137-147]. Отправляясь от этого факта [5,830] получают формулу Кирхгофа для решений уравнений ЭПД, в том числе для волнового уравнения.

В данной работе в отличие от цитируемых источников для решения поставленной задачи применим другой подход. А именно, учитывая специфику уравнений с сингулярными коэффициентами, используем обобщенный оператор интегрирования Эрдейи-Кобера. Данный подход для решения поставленной задачи при $m=1$ применен в работе [6,321-337].

2. Обобщенный оператор Эрдейи – Кобера.

В работе Дж. Лоундеса [7,139-148] был введен и исследован обобщенный оператор Эрдейи – Кобера с функцией Бесселя в ядре

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=2^\alpha\lambda^{1-\alpha}x^{-2\alpha-2\eta}\int_0^x t^{2\eta+1}(x^2-t^2)^{(\alpha-1)/2}J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt, \qquad (4)$$

где $\alpha,\eta,\lambda\in R,\ \alpha>0,\ \eta\geq-(1/2)$, $J_\nu(z)-$ функция Бесселя первого рода порядка ν. Оператор (4) при $\lambda\to 0$ совпадает с обычным оператором Эрдейи – Кобера [8,702]

$$I_{\eta,\alpha}f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{2\eta+1}f(t)dt, \qquad (5)$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма – функция Эйлера.

Основные свойства этих операторов можно найти в книге [8].

В дальнейшем нам понадобится следующая форма оператора (4):

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{2\eta+1}(x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t))dt, \qquad (6)$$

где $\bar{J}_\nu(z)-$ функция Бесселя - Клиффорда, которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле [8]:

$$\bar{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)={}_0F_1(\nu+1;-z^2/4)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k\,k!}. \qquad (7)$$

В работах [9,11-13], [10,20-40] доказаны следующие теоремы:

Пусть $[B_\eta^x]^0=E$, E - единичный оператор, $[B_\eta^x]^m=[B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x]==[B_\eta^x][B_\eta^x]...[B_\eta^x]$ - $m-$ая степень оператора Бесселя. Здесь и далее m означает натуральное число.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha>0,\ \eta\geq-(1/2)$, $f(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, *функции* $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$ *интегрируемы в окрестности точки* $x=0$ *и* $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$[B_{\eta+\alpha}^x+\lambda^2]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x]^m f(x).$$

Пусть функция $u(x,y)=u(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ непрерывно дифференцируема до порядка $2m$ по переменной y и порядка не меньше чем m по x. L_x - не зависящий от y линейный дифференциальный оператор любого конечного порядка по переменной $x\in R^n$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha>0,\eta\ge-(1/2)$, *функции* $y^{2\eta+1}[B_\eta^y]^k u(x,y)$ *интегрируемы в окрестности начала координат и* $\lim\limits_{y\to 0} y^{2\eta+1}\dfrac{\partial}{\partial y}[B_\eta^y]^k u(x,y)=0,\ k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$(B_{\eta+\alpha}^y+\lambda^2+L_x)^m J_\lambda^y(\eta,\alpha)u(x,y)=J_\lambda^y(\eta,\alpha)(B_\eta^y+L_x)^m u(x,y), \qquad (8)$$

в частности, если $\lambda=0$, *тогда* $(B_{\eta+\alpha}^y+L_x)^m I_{\eta,\alpha}^y u(x,y)=I_{\eta,\alpha}^y(B_\eta^y+L_x)^m u(x,y)$,

верхний индекс y *в операторах означает переменную, по которой действуют эти операторы.*

Пусть $D_\eta^0=E$, $D_\eta=x^{-2\eta}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)x^{2\eta}$, $D_\eta^m=D_\eta^{m-1}D_\eta=D_\eta D_\eta \dots D_\eta$ - m - тая степень оператора D_η, которая представима в виде $D_\eta^m=x^{-2\eta}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\right)^m x^{2\eta}$.

Теорема 3. *Если* $\alpha>0,\eta\ge-(1/2)$, $f(x)\in C^m(0,b),\ b>0$, *функции* $x^{2\eta+1}D_\eta^{k+1}f(x)$ *- интегрируемы окрестности точки* $x=0$ *и* $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta}D_\eta^k f(x)=0,\ k=\overline{0,m-1}$, *то верно равенство*

$$D_{\eta+\alpha}^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta^m f(x). \quad (9)$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha>0,\eta\ge-1/2$, $f(x)\in C^{2m}(0,b),\ b>0$, *функции* $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$ *интегрируемы в окрестности точки* $x=0$ *и* $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^m a_{mj}x^{2j}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{m+j}f(x),$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^m b_{mj}x^{2j+1}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{m+j+1}f(x),$$

где постоянные a_{mj} *и* b_{mj} *определяются из следующих рекуррентных соотношений:*

$$a_{00}=1,\ b_{00}=1/2,\ b_{mj}=(1/2)a_{mj}+2(j+1)a_{m(j+1)},\ 0\le j\le m,\ a_{mj}=0, j>m,$$
$$a_{(m+1)j}=(1/2)b_{m(j-1)}+(2j+1)b_{mj},\ 1\le j\le m,\ b_{mj}=0, j>m,\ a_{(m+1)0}=b_{m0}=$$
$$=2^{-(m+1)}(2m+1)!!.$$

Теорема 5. *Пусть* $\alpha>0,\eta\ge-1/2$, $f(x)\in C^{2m-1}[0,b]\cap C^{2m}(0,b),\ b>0$, $\lim\limits_{x\to 0}[B_\eta^x]^k f(x)=c_k,\ c_k=const$ *и* $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. *Тогда*

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Big|_{x=0}=\frac{(\alpha+\eta+1)_m}{(1/2)_m}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Big|_{x=0},\ \frac{d}{dx}[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Big|_{x=0}=0,$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Big|_{x=0}=0.$$

Приведенные выше теоремы позволяют сводить сингулярные (или вырождающиеся) уравнения высокого как четного, так и нечетного порядка к не сингулярным уравнениям и тем самым поставить и исследовать корректные начальные и граничные задачи для таких уравнений.

3. Приложение оператора Эрдейи–Кобера к решению поставленной задачи

Предположим, что решение задачи {(1), (2)} существует. Это решение будем искать в виде

$$u(x,t) = J_{\lambda}^{t}(\eta,\alpha)U(x,t), \tag{10}$$

где $\eta = -1/2, \alpha = \gamma + 1/2 > 0$, $U(x,t)$ - достаточное число раз дифференцируемая неизвестная функция.

Подставим (10) в начальные условия (2) и применим теоремы 4 и 5, а затем, подставляя в уравнение (1) и используя теорему 2, при $\eta = -1/2$, $L_x \equiv -\Delta_x$ получим следующую задачу нахождения решения $U(x,t)$ поливолнового уравнения

$$L_{0,0}^{m}(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)^m U(x,t) = 0, \quad (x,t) \in R_{+}^{n+1} \tag{11}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k}U}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = \Phi_k(x), \quad \left.\frac{\partial^{2k+1}U}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0} = 0, \quad x \in R^n, \ k = \overline{1,m-1}, \tag{12}$$

где $\Phi_k(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j C_k^j \lambda^{2(k-j)} \varphi_j(x)$, $k = \overline{0,m-1}$, $C_k^j = k!/[j!(k-j)!]$ -биномиальный коэффициент, $a_j = \Gamma\big((2j+1)/2+\alpha\big)/\Gamma\big((2j+1)/2\big)$.

Задача Коши для поливолнового уравнения (11) изучалась в работах [11,492-505] и [12,2085], однако построенные им формулы для решения задачи содержат весьма громоздкие кратные интегралы.

Формулы, полученные в упомянутых работах, в нашем случае оказались неудобными. Поэтому в данной работе задачу Коши для поливолнового уравнения (11) решим методом сферических средних.

Для полноты изложения рассмотрим задачу Коши для поливолнового уравнения (11), удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = \Phi_k(x), \quad \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0} = \Psi_k(x), \quad x \in R^n, \ k = \overline{1,m-1}, \tag{13}$$

где $\Phi_k(x)$ и $\Psi_k(x)$ $(k = \overline{0,m-1})$ -заданные функции.

Решение задачи {(11), (13)} имеет вид [13,26-36]

$$U(x,t) = \gamma_n \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=t} f_0(\xi)d\sigma_\xi\right) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=t} g_0(\xi)d\sigma_\xi\right)\right] +$$

$$+\gamma_n \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^{2k-1}(k-1)!k!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int\limits_{|\xi-x|\le t}\left[t^2 - |\xi - x|^2\right]^{k-1} f_k(\xi)d\xi +$$

$$+\gamma_n \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2^{2k-1}(k-1)!k!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int\limits_{|\xi-x|\le t}\left[t^2 - |\xi - x|^2\right]^{k-1} g_k(\xi)d\xi, \tag{14}$$

где $\gamma_n = [1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-2)\omega_n]^{-1}$,

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j \Delta_x^{k-j}\Phi_j(x), \quad g_k(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j \Delta_x^{k-j}\Psi_j(x), \quad k = \overline{0,m-1}. \tag{15}$$

Как и в случае волнового уравнения [5], можно показать, что если $\varphi_j(x)\in C^{q_1}(\Omega_n)$, $\psi_j(x)\in C^{q_2}(\Omega_n)$, $q_1=[(n+1)/2]+2(m-j)+2$, $q_2=[(n+1)/2]+2(m-j)+1$, $j=\overline{0,m-1}$, где $[(n+1)/2]$ - означает целую часть числа $(n+1)/2$, то функция $U(x,t)$, определяемая равенством (14), при нечетном n является классическим решением задачи Коши {(11), (13)}, из которого при $m=1$ следует формула Кирхгофа [5] для волнового уравнения.

При четном n, применяя метод спуска Адамара [5] из формулы (14) также можно получить явную формулу решения задачи Коши {(11), (13)}:

$$U(x,t)=\tilde{\gamma}_n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma^{-1}(k+1/2)}{2^{2k}k!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\int\limits_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{k-(1/2)}f_k(\xi)d\xi+$$

$$+\tilde{\gamma}_n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma^{-1}(k+1/2)}{2^{2k}k!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\int\limits_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{k-(1/2)}g_k(\xi)d\xi, \qquad (16)$$

где $\tilde{\gamma}_n=[\omega_{n+1}2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(n-1)]^{-1}$.

Аналогично, как и в случае нечетного n, можно показать, что если $\varphi_j(x)\in C^{q_1}(\Omega_n)$, $\psi_j(x)\in C^{q_2}(\Omega_n)$, $q_1=[n/2]+2(m-j)+2$, $q_2=[n/2]+ +2(m-j)+1$, $j=\overline{0,m-1}$, то функция $U(x,t)$ определяемая равенством (16), при четном n является классическим решением задачи Коши {(11), (13)}.

Вернемся к исследованию задачи {(1), (2)}. Учитывая решение вспомогательной задачи {(11), (13)} при нечетном $n=2p+1,\ p\in N$ и $\Psi_k(x)=0$, из (16), имеем

$$U(x,t)=\frac{1}{A_0^p}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1}\left(t^{2p-1}F_0(x,t)\right)+$$

$$+\frac{1}{A_0^p}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k}}{(k-1)!k!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1}\int_0^t(t^2-\tau^2)^{k-1}\tau^{2p}F_k(x,\tau)d\tau, \qquad (17)$$

где $A_0^p=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2p-1)=(2p-1)!!$,

$$F_k(x,r)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{|\xi-x|=r}f_k(\xi)d\sigma_\xi=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\eta|=1}f_k(x+r\eta)d\sigma_\eta, \qquad (18)$$

$$G_k(x,r)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{|\xi-x|=r}g(\xi)d\sigma_\xi=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\eta|=1}g(x+r\eta)d\sigma_\eta, \qquad (19)$$

причем $\frac{\partial F_k}{\partial r}(x,0)=0,\ \frac{\partial G_k}{\partial r}(x,0)=0$.

Подставляя (17) в (10) после несложных преобразований, получим

$$u(x,t)=\frac{1}{A_0^p\Gamma(\alpha)}t^{1-2\alpha}Q_0(x,t)+\frac{1}{A_0^p\Gamma(\alpha)}t^{1-2\alpha}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k}}{(k-1)!k!}Q_k(x,t), \qquad (20)$$

где

$$Q_0(x,t)=\int_0^t(t^2-s^2)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^{p-1}\left(s^{2p-1}F_0(x,s)\right)\right]ds,$$

$$Q_k(x,t)=\int_0^t(t^2-s^2)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^{p-1}\int_0^s(s^2-\tau^2)^{k-1}\tau^{2p}F_k(x,\tau)d\tau\right]ds.$$

Применяя формулу (9), имеем

$$Q_0(x,t)=\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\int_0^t (t^2-s^2)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)s^{2p}F_0(x,s)ds\,,$$

$$Q_k(x,t)=\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\int_0^t (t^2-s^2)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)s\times$$

$$\times\left[\int_0^s (s^2-\tau^2)^{k-1}\tau^{2p}F_k(x,\tau)d\tau\right]ds\,. \qquad (21)$$

Учитывая значение функции $F_0(x,s)$ из (18), функцию $Q_0(x,t)$ можно написать в виде

$$Q_0(x,t)=\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)f_0(\xi)d\xi\,. \qquad (22)$$

В равенстве (21) произведя перестановку порядка интегрирования, получим

$$Q_k(x,t)=\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\int_0^t \tau^{2p}F_k(x,\tau)K(t,\tau)d\tau\,, \qquad (23)$$

где

$$K(t,\tau)=\int_\tau^t (t^2-s^2)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\right)s(s^2-\tau^2)^{k-1}ds\,.$$

Вычислим последний интеграл. Произведя замену переменных интегрирования по формуле $s^2=\tau^2+[t^2-\tau^2]\mu$, получим

$$K(t,\tau)=(1/2)(t^2-\tau^2)^{\alpha+k-1}\int_0^1 \mu^{k-1}(1-\mu)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{(t^2-\tau^2)(1-\mu)}\right)d\mu\,.$$

Пользуясь разложением функции Бесселя-Клиффорда в ряд (7) и учитывая равномерную сходимость данного ряда при любых значениях аргумента, меняем порядок интегрирования и суммирования. Затем, вычислив интеграл, получим

$$K(t,\tau)=\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+k)}(t^2-\tau^2)^{\alpha+k-1}\overline{J}_{\alpha+k-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-\tau^2}\right).$$

Подставляя значение функции $K(t,\tau)$ в (23), имеем

$$Q_k(x,t)=\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+k)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\int_0^t \tau^{2p}F_k(x,\tau)(t^2-\tau^2)^{\alpha+k-1}\overline{J}_{\alpha+k-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-\tau^2}\right)d\tau\,. \qquad (24)$$

Подставляя в (24) значение функций $F_k(x,s)$ из равенства (18), находим

$$Q_k(x,t)=\frac{\Gamma(k)\Gamma(\alpha)}{2\Gamma(\alpha+k)}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\times$$

$$\times\int_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha+k-1}\overline{J}_{\alpha+k-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)f_k(\xi)d\xi\,. \qquad (25)$$

Подставив (22) и (25) в (20) и принимая во внимание равенство $\Gamma(k)=(k-1)!$, окончательно находим явную формулу решения задачи {(1), (2)} при нечетном n:

$$u(x,t)=\overline{\gamma}_n t^{1-2\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)f_0(\xi)d\xi+$$

$$+\overline{\gamma}_n t^{1-2a}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k}}{k!(\alpha)_k}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha+k-1}\overline{J}_{\alpha+k-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)f_k(\xi)d\xi\,, \qquad (26)$$

где $\gamma_n = [1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(n-2)\omega_n\Gamma(\alpha)]^{-1}$.

При четном n, применяя метод спуска Адамара [5], из формулы (26) также можно получить явную формулу решения задачи Коши {(1), (2)}:

$$u(x,t) = \overline{\gamma}_n t^{1-2\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2^{-2k}}{k!(\alpha+1/2)_k} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{|\xi-x|<t} \left[t^2 - |\xi-x|^2\right]^{\alpha+k-(1/2)} \overline{J}_{\alpha+k-(1/2)}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right) f_k(\xi)d\xi . \quad (27)$$

Из теоремы 5 следует, что в задаче {(1), (2)} вместо начальных условий (2) можно взять начальные условия вида

$$[B^y_{\beta-(1/2)}]^k u\Big|_{y=0} = \varphi^*_k(x),\ x\ge 0;\ \frac{\partial}{\partial y}[B^y_{\beta-(1/2)}]^k u\Big|_{y=0} = 0,\ x>0,\ k=\overline{0,m-1}, \quad (28)$$

где $\varphi^*_k(x) = [(\beta+1/2)_k/(1/2)_k]\varphi_k(x)$.

Кроме того, в силу теоремы 1 и 5, а также равенства (10), следует, что задачи {(1), (2)} и {(1), (28)} сводятся к одной и той же вспомогательной задаче {(11), (12)}. Отсюда следует справедливость следующего утверждения

Лемма 1._Решение задачи_ {(1), (2)} _является решением задачи_ {(1), (28)}, _и наоборот_.

Аналогичное утверждение имеет место и для задачи {(1), (3)}. В работах [2], [3] доказано, что вместо начальных условий (3) можно взять начальные условия вида

$$[B^y_{\beta-(1/2)}]^k u\Big|_{y=0} = 0,\ x\ge 0;\ y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}[B^y_{\beta-(1/2)}]^k u\Big|_{y=0} = \psi^*_k(x),\ x>0,\ k=\overline{0,m-1}, \quad (29)$$

где $\psi_k(x) = \prod_{j=1}^{k}(1-(\beta/j))\psi^*_k(x)$.

При этом справедливо следующее утверждение

Лемма 2._При любом_ $\beta<(1/2)$ _решение задачи_ {(1), (3)} _является решением задачи_ {(1), (29)} _и наоборот_.

Теперь рассмотрим задачу нахождения решения $u_2(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (29).

Лемма 3._Если_ $u_1(x,y;1-\beta)$ _является решением уравнения_ $[h^\lambda_{1-\beta,\alpha}]^m(u_1)=0$, _удовлетворяющее условиям_ (28), _в котором_ β _заменено на_ $1-\beta$, _то функция_ $u_2(x,y;\beta) = y^{1-2\beta}u_1(x,y;1-\beta)$ _при_ $0<\beta<(1/2)$ _будет решением уравнения_ $[h^\lambda_{\beta,\alpha}]^m(u_2)=0$ _удовлетворяющее условиям_ $[B^y_{\beta-(1/2)}]^k u_2\Big|_{y=0} = 0,\ x\ge 0;$

$$y^{2\beta}\frac{\partial}{\partial y}[B^y_{\beta-(1/2)}]^k u_2\Big|_{y=0} = (1-2\beta)\varphi^*_k(x),\ x>0,\ k=\overline{0,m-1}.$$

Лемма 3, аналогично и в работах [2], [3], доказываетсяметодом математической индукции по m.

Для решения задачи {(1), (29)}, применив лемму 3, в силу (26) при нечетном n, имеем

$$u_2(x,t) = \overline{\gamma}_n \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{|\xi-x|<t} \left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{-\alpha} \overline{J}_{-\alpha}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right) g^*_0(\xi)d\xi +$$

$$+\overline{\gamma}_n \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2^{-2k}}{k!(1-\alpha)_k} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int\limits_{|\xi-x|<t} \frac{\overline{J}_{-\alpha+k}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)}{\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha-k}} g^*_k(\xi)d\xi ,$$

где $g_k^*(s)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j [B_{\alpha-1/2}^x]^j \Psi_{k-j}^*(x)$, $\Psi_k^*(x)=\sum_{j=0}^{k} a_j C_k^j \lambda^{2(k-j)} \psi_j^*(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Аналогично в случае четного n из (27), имеем

$$u_2(x,t)=\overline{\gamma}_n \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2^{-2k}}{k!((3/2)-\alpha)_k} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{|\xi-x|<t} \left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{(3/2)-\alpha+k} \overline{J}_{(3/2)-\alpha+k}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right) g_k^*(\xi)d\xi .$$

Литература:

1. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. - М.: Наука, 1987.
2. Иванов Л.А. Задача Коши для некоторых операторов с особенностями // Дифференциальные уравнения. –Минск. -1982. -Т.18 (6).
3. Алдашев С.А. О задаче Коши для операторов, распадающихся на множители с особенностями //Дифференциальные уравнения. –Минск, 1981. -Т.17 (2).
4. Weinstein A. On the wave equation and the equation of Euler - Poisson. -In: Proc. Fifth Symp. Appl. Math., AMS, 1954.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными.–М.: Мир, 1964.
6. Urinov A.K., Karimov Sh.T. Solution of the Cauchy Problem for Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation by the Method of Fractional Integrals // Всборнике: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Сер. "Progress in Partial Differential Equations: Asymptotic Profiles, Regularity an Well-Posedness" 2013.
7. Lowndes J.S. A generalization of the Erdélyi-Kober operators. Proc. Edinb. Math. Soc. 17, No 2 (1970).
8. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
9. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщённого оператора Эрдейи-Кобера и их приложения. // Докл. АН РУз. – 2014. -№ 5.
10. Каримов Ш.Т.О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. -2017. -№ 2(18).
11. Krahn D. On the iterated wave equation. Proc. Ser. A, Math. Sciences, Amsterdam, 1957, Vol. 60, 1.
12. Алдашев С. А. Задача Коши для одного уравнения 2n-го порядка// Дифференциальные уравнения. – Минск. 1979. -Т.15 (11).
13. Каримов Ш. Т. Решение задачи Коши для поливолнового уравнения методом сферических средних. // Вестник НУУ. –2016, № 2/1.