ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2019

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.956

АМАЛИЙ МАТЕМАТИКАНИНГ БАЪЗИ ЗАМОНАВИЙ МУАММОЛАРИ ҲАҚИДА
О НЕКОТОРЫХ СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ON SOME MODERN PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS

Ж.О.Тахиров

Аннотация

Мақолада амалий математика олдида турган замонавий муаммолар, хусусан, тирик тизимларни математик моделлаштириш ҳақида сўз боради.Саратон ҳужайраларининг тарқалиши ва қоннинг ивишига доир номаълум чегаравий масалалар бўйича баъзи натижалар келтирилган.

Аннотация

В статье обсуждаются современные проблемы прикладной математики, в частности, задачи математического моделирования живых систем. Приведены некоторые результаты по неизвестным краевым задачам по распространению раковых клеток и свертывания крови.

Annotation

This article discusses some of the modern problems of applied mathematics. In particular, it studies the mathematical modeling of living organisms. Among the considered issues is the study of the invasion of cancer cells and a free boundary problem modeling blood coagulation.

Таянч сўз ва иборалар: *математик модель, априор баҳолар, ечимнинг мавжудлиги.*
Ключевые слова и выражения: *математическая модель, априорная оценка, существование решения.*
Keywords and expressions: *mathematical model, apriori estimate, existence of solution.*

Введение. Узбекские ученые-математики поставили перед собой задачу− исследовать некоторые нерешенные проблемы современной прикладной математики: создание методов построения, исследования, анализа и идентификации новых согласованных моделей механики сплошных сред, биологии и медицины, энергетики, газо-гидродинамики.

Известно, что одним из наиболее острых противоречий современной прикладной математики является, с одной стороны, стремительное нарастание вычислительных мощностей, а с другой стороны, необходимость рассматривать все более сложные нелинейные математические модели естествознания. Необходима идентификация этих моделей, а также создание и развитие новых методов анализа.

Усилия ученых будут в целом направлены на проведение фундаментальных исследований в области современной прикладной математики с целью получения научных результатов мирового уровня, а также на подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров и формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Известно, что качественная теория дифференциальных уравнений в частных производных лежит в основе современной теории сложных систем и синергетики. На базе этих знаний можно исследовать основные типы временного и пространственного динамического поведения, присущие биологическим (живым) и экологическим системам разного уровня. Сейчас биология, химия и физика переплетаются столь тесно, что любое биологическое утверждение нуждается в сопоставлении с законами физики и химии при помощи математического аппарата. С другой стороны, количество новой экспериментальной информации такова, что систематизировать его без качественной теории и без математического моделировани невозможно.

О математическом моделировании живых систем

Несмотря на разнообразие живых систем, все они обладают следующими специфическими чертами, которые необходимо учитывать при построении моделей.

Сложные системы. Все биологические системы являются сложными многокомпонентными, пространственно

Ж.О.Тахиров – Институт математики АН РУз.

структурированными, элементы которых обладают индивидуальностью. При моделировании таких систем возможны два подхода. **Первый – агрегированный, феноменологический. Другой подход – подробноерассмотрение элементов системы и их взаимодействий, построение имитационной модели, параметры которой имеют ясный физический и биологический смысл.**

Размножающиеся системы. Это важнейшее свойство живых систем определяет их способность перерабатывать неорганическое и органическое вещество для биосинтеза биологических макромолекул, клеток, организмов.

Открытые системы, постоянно пропускающие через себя потоки вещества и энергии. Биологические системы далеки от термодинамического равновесия, и потому описываются **нелинейными уравнениями.**

Биологические объекты имеют сложную ногоуровневую **систему регуляции**.

В биохимической кинетике это выражается в наличии в схемах петельобратной связи, как положительной, так и отрицательной. В уравнениях локальных взаимодействий обратные связи описываются нелинейными функциями, характер которых определяет возможность возникновения и свойства сложных кинетических режимов, в том числе колебательных и квазистохастических. Такого типа нелинейности при учете пространственного распределения и процессов переноса обусловливают паттерны стационарных структур (пятна различной формы, периодические диссипативные структуры) и типы автоволнового поведения (движущиеся фронты, бегущие волны, ведущие центры, спиральные волны и др.)

Живые системы имеют сложную пространственную структуру.

Теперь приведем сокращенные варианты некоторых новых результатов в этой области.

1. О математической модели распространения раковых клеток

Инфекция раком связана с деградацией внеклеточной матрицы (ECM), которая деградируется ферментами, деградирующими цитоплазмой (MDE), производимой опухолевыми клетками. Деградация создает пространственные градиенты, которые направляют миграцию вторгающихся клеток либо через хаптотаксис (клеточное движение, направленное в ответ на градиент концентрации диффундирующей MDE либо через хемотаксис (клеточная диффузия, направленная в ответ на градиент концентрации связывающих молекул вдоль ECM). Chaplain и Lolas [1,399-439] предложили модель PDE, описывающую ферменты и ткань жертвы (ECM). Модель рассматривает конкуренцию между тремя следующими биологическими механизмами: хемотаксис, хаптотаксис и рост логистических клеток.

Классическая модель хемотаксиса, по-видимому впервые предложена Keller и Segel [2,399-415] для описания агрегации определенных типов бактерий. Gatenby и Gawlinski [3,5745-5753] использовали реакционно-диффузионную модель конкуренции популяции, чтобы исследовать, как опухоль вторгается в окружающую нормальную ткань или ECM.

Качественный анализ различных моделей распространения рака математически интересен. Walker и Webb [4,1694-1713] исследовали проблемы глобального существования и единственности для модели Chaplain и Anderson [5,267-297]. Глобальное существование и единственность классических решений модели Chaplain и Lolas [1,399-439] доказаны в работах [6,60-69; 7,612-624].

Математическая модель распространения рака в следующих трех физических переменных: плотность раковых клеток $u(x,t)$, плотность ECM $v(x,t)$ и концентрация MDE $w(x,t)$.

Исследуется следующая модель

$$u_t = \underbrace{\nabla\cdot(d_1(u)\nabla u)}_{\text{random motion}} - \underbrace{\nabla\cdot(a_1(u)\nabla w)}_{\text{chemotaxis}} - \underbrace{\nabla\cdot(b_1(u)\nabla v)}_{\text{haptotaxis}} + \underbrace{c_1 u(1-u-v)}_{\text{proliferation}} \text{ in } Q_T, \quad (1)$$

$$v_t = \underbrace{d_2\Delta v}_{\text{random motion}} - \underbrace{b_2 wv}_{\text{proteolysis}} + \underbrace{c_2 v(1-u-v)}_{\text{re-establishment}} \text{ in } Q_T, \tag{2}$$

$$w_t = \underbrace{d_3\Delta w}_{\text{random motion}} + \underbrace{b_3 u}_{\text{production}} \underbrace{-c_3 w}_{\text{decay}} \text{ in } Q_T, \tag{3}$$

$$(u(x,0), v(x,0), w(x,0)) = (u_0(x), v_0(x), w_0(x)) \geqslant (0,0,0) \text{ in } \Omega, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ on } S_T, \tag{5}$$

где $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω - ограниченная область в R^3 с гладкой границей $\partial\Omega$ и внешней единичной нормой $\nu, S_T = \partial\Omega \times (0,T), T > 0$.

Мы предполагаем, что:

I. $d_1(u) \geqslant d_0 > 0, d_1(u), a_1(u), b_1(u) \in C'([0,\infty))$ и ограничены для любого $u \geqslant 0$, $a_1, b_1 \geqslant 0, a_1(0), b_1(0) = 0$ и $d_1(u), a_1'(u), b_1'(u)$ - липшицевы непрерывны;

II. $d_i, b_i, c_i, i = 2,3, c_1$ считаются положительными константами;

III. $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}, u_0(x), v_0(x), w_0(x)\ in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \dfrac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v_0(x)}{\partial \nu} = \dfrac{\partial w_0(x)}{\partial \nu} = 0$ на $\partial\Omega$.

Сначала докажем локальное существование и единственность решения для модели, и далее, установим некоторые априорные оценки. Впоследствии, используя эти вспомогательные результаты, мы докажем глобальное существование единственного классического решения. Для функциональных пространств и норм мы используем обозначения и результаты [8].

Локальное существование и единственность. Мы обозначаем различные константы, не зависящие от T по A_0, и мы также обозначаем различные константы, зависящие от T по A.

Теорема 1. Пусть верны предположения I.-III. Тогда существует единственное решение $(u,v,w) \in \left(C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\right)^3$ задачи (1)-(5) для некоторого малого $T > 0$, которое зависит от $\|(u_0(x), v_0(x), w_0(x))\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})}$.

Доказательство. Мы докажем локальное существование решения при помощи принципа неподвижных точек. Введем банахово пространство X функции $u(x,t)$ с нормой $\|u\|_X = \|u\|_{C^{1+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)}$ $(0 < T < 1)$ и под множеством $X_M = \{u \in X : \|u\|_{C^{1+\alpha,\alpha/2}(Q_T)} \leqslant M\}$, $M := \|u_0(x)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + \|v_0(x)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + \|w_0(x)\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} + 1$.

Для любого $u \in X_M$, определим соответствующую функцию $\bar{u} = Fu$, где $\bar{u}(x,t)$ вместе с v и w, удовлетворяет следующей системе:

$$w_t - d_3\Delta w + c_3 w = b_3 u \text{ in } Q_T, \tag{6}$$

$$w(x,0) = w_0(x) \text{ in } \Omega, \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ on } S_T, \tag{7}$$

$$v_t - d_2\Delta v - b_2 wv + c_2 v(1-u-v) \text{ in } Q_T, \tag{8}$$

$$v(x,0) = v_0(x) \text{ in } \Omega, \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ on } S_T, \tag{9}$$

$$\bar{u}_t - \nabla \cdot (d_1(\bar{u})\nabla \bar{u}) - c_1(1-u-v)\bar{u} = f(u,v,w), \tag{10}$$

$$\bar{u}(x,0) = u_0(x) \text{ in } \Omega, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} = 0 \text{ on } S_T, \tag{11}$$

где $f(u,v,w) = -\nabla \cdot (a_1(u)\nabla w) - \nabla \cdot (b_1(u)\nabla v)$.

Сначала рассмотрим задачу (6), (7) , а затем исследуем задачу (8), (9). Так как $u \in X_M, 0 < T < 1$и по принципу максимума и параболической теории Шаудера [8] эти задачи имеют единственное решение. Используя оценки Шаудера, мы можем доказать, как это сделано в [8], что F отображает X_M в себяе и F является сжимающим в X_M , если взять достаточное малое T .

Априорные оценки и глобальное существование. Чтобы продолжить локальное решение в теореме 1 для всех $t > 0$, нам нужно установить некоторые априорные оценки. Сначала сформулируем некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть $(u,v,w) \in C^{2,1}(Q_T)$ является решением задачи (1)-(5), тогда $u(x,t) \geqslant 0, 0 \leqslant v(x,t) \leqslant A_0, w(x,t) \geqslant 0$.

Лемма 2. Пусть $(u,v,w) \in C^{2,1}(Q_T)$ является решением задачи (1)-(5), тогда $\| u \|_{L^1(\Omega)} \leqslant A_0, \| w \|_{L^1(\Omega)} \leqslant A_0, \| \nabla w \|_{L^2(\Omega)} \leqslant A_0, \| \nabla v \|_{L^2(\Omega)} \leqslant A_0$.

Лемма 3. Пусть $(u,v,w) \in C^{2,1}(Q_T)$ является решением задачи (1)-(5), тогда

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leqslant A. \tag{12}$$

Доказательство. Для любого $s \geqslant 2$, мы получаем из (1), (5) и предположения **I**, что

$$J = \frac{d}{dt}\int_\Omega u^s dx = s\int_\Omega u^{s-1} u_t dx =$$

$$s\int_\Omega u^{s-1}\left[\nabla\cdot(d_1(u)\nabla u) - \nabla\cdot(a_1(u)\nabla w) - \nabla\cdot(b_1(u)\nabla v) + c_1 u(1-u-v)\right]dx \leqslant$$

$$-\frac{4(s-1)}{s}\int_\Omega d_1(u)\,|\nabla u^{s/2}|^2\, dx + c_1 s\int_\Omega u^s dx + A_0 s(s-1)\int_\Omega u^{s-2}\left(|\nabla u||\nabla w| + |\nabla u|\cdot|\nabla v|\right)dx. \tag{13}$$

Взяв $s = 2$ в (13) и используя неравенство Коши и оценки по лемме 3.2, получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2 dx \leqslant A + 2c_1\int_\Omega u^2 dx.$$

Это, вместе с леммой Гронуолла, дает оценку (12).

Лемма 4. Пусть $(u,v,w) \in C^{2,1}(Q_T)$ является решением (1)-(5), тогда для любого $p > 5$ имеем

$$\| w \|_{W_p^{2,1}(Q_T)} \leqslant A, \| \Delta v \|_{L^p(\Omega)} \leqslant A, \| u \|_{W_p^{2,1}(Q_T)} \leqslant A.$$

Теорема 2. При предположениях I.-III. существует единственное решение $(u,v,w) \in \left(C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\right)^3$ задачи (1)-(5) для любого $T > 0$.

2. Математическая модель свертывания крови со свободной границей.

Рассмотрим процесс повреждения сосуда или контакта плазмы крови с чужеродной поверхностью. При этом запускается цепь взаимосвязанных биохимических реакций (каскад свертывания), задачей которых является быстрое создание в небольшой области, примыкающей к поврежденной стенке сосуда, полимерного твердого сгустка (тромба), основу которого составляют волокна фибрина. Это принципиально важно для свертывания, поскольку сгусток должен оставаться локализованным в месте повреждения сосуда.

Для исследования динамических свойств плазмы крови были построены математические модели разного уровня детальности, основанные на современных молекулярных представлениях о природе свертывания крови. А упрощенные качественные математические модели основных реакций каскада свертываемости позволяют проводить строгий математический анализ моделей и делать выводы о глобальных свойствах системы. Оказывается, в процессе образования тромба концентрация тромбина в плазме крови распространяется с постоянной скоростью и это хорошо описывается решениями типа бегущей волны в системе уравнений реакции-диффузии.

Разработанная в работе [9] математическая модель свертывания крови представляет собой трехкомпонентную систему параболических уравнений типа реакция-диффузия

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + K_1 uv(1-u)\dfrac{1+K_2 u}{1+K_3 w} - u, \\ w_t = d_2 w_{xx} + u + K_4 w, \\ v_t = d_3 v_{xx} + K_5 u^2 - K_6 v. \end{cases}$$

Здесь $u(t,x)$ - концентрация активатора (тромбина), $w(t,x)$ - концентрация ускорителя производства активатора, $v(t,x)$ - концентрация ингибитора. Постоянные K_i характеризуют "химическую" часть системы и они представляют собой сложные комбинации величин, используемых для нормализации концентраций и констант каскада химических реакций свертывания крови.

В работах [9,57-70;10,87-104] система уравнений рассмотрена в прямоугольной области и на боковых границах заданы условия отсутствия потоков каждого из компонента. Начальные условия заданы следующим образом: $u(0,x) = u_0(x)$ на некотором участке и $u(0,x) = 0$ за его пределами; $w(0,x) = v(0,x) = 0$ при всех x.

Приводятся результаты анализа и численного исследования модели, обсуждаются особенности образования динамических и статистических структур. Оказывается, что тромбин может существовать в нескольких формах: прокоагулянтной, ускоряя свертывание, и антикоагулянтной, замедляя процесс собственного образования. В [9,57-70] показано, что механизм переключения между этими двумя состояниями тромбина возможно описать экспериментально наблюдаемый характер пространственного роста тромба, включая его остановку.

Существует большое количество работ, посвященных как моделированию кинетик реакций каскада свертываемости, так и анализу пространственно-временной динамики роста тромба в неподвижной плазме и с учетом гидродинамики кровотока [10,87-104;11,55-69;12,1138-1148].

В настоящей работе предлагается математическая модель свертывания плазмы крови в виде задачи со свободной (неизвестной) границей, которая получена из модели [9,57-70], показавшей хорошее соответствие экспериментальным данным.

В областях $D = \{(t,x): 0 < t \leqslant T, 0 < x < s(t)\}, Q = \{(t,x): 0 < t \leqslant T, 0 < x < l\}$ требуется найти функции $(s(t), u(t,x), w(t,x), v(t,x))$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = (d_1(u)u_x)_x + c_1 u_x + K_1 uv(M_1 - u)\frac{1+K_2 u}{1+K_3 w} - K_0 u, \tag{1}$$

$$w_t = (d_2(w)w_x)_x + c_2 w_x + u - K_4 w, \tag{2}$$

$$v_t = (d_3(v)v_x)_x + c_3 v_x + K_5 u^2 - K_6 v. \tag{3}$$

$$u(0,x) = u_0(x) > 0, 0 \leqslant x \leqslant s_0 = s(0), u(0,x) = 0, s_0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = u(t,s(t)) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, u(t,x) = 0, s(t) \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

$$\dot{s}(t) = -d_1(0)u_x(t,s(t)), 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$w_x(t,0) = w_x(t,l) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

$$v_x(t,0) = v_x(t,l) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

$$w(0,x) = w_0(x), v(0,x) = v_0(x), 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{9}$$

где $x=s(t)$ - свободная граница, которая представляет фронт распространения тромба и определяется вместе с функциями $(u,w,v), d_i(\cdot)(i=\overline{1,3})$ - коэффициенты нелинейной диффузии, а члены с коэффициентами $c_i(i=\overline{1,3})$ характеризуют перенос вещества. Теперь об условии Стефана: начальная концентрация $u_0(x)$ находится в области $[0,s_0]$ и начинает двигатся направо и фронт распространения расширяется со скоростью, пропорциональной градиенту концентрации на фронте, которое дает условие (6).

(I). Функции $d_i(\xi)\geqslant d_{i0}>0$ для произвольных ξ, непрерывно дифференцируемых и производные удовлетворяют условию Гельдера;

(II). $(u_0(x),w_0(x),v_0(x))\geqslant(0,0,v^*),(u_0(x),w_0(x),v_0(x))\in C^{2+\alpha}[0,l],v^*>0$;

(III). $K_i,i=\overline{0,6},c_j,j=\overline{1,3}$ - положительные постоянные.

В этом разделе установим некоторые априорные оценки Шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи по t. При этом широко принменяются припцип максимума и теоремы сравнений [8].

Теорема 1. Пусть функции $(s(t),u(t,x),w(t,x),v(t,x))$ являются решением задачи (1)-(9). Тогда существуют положительные постоянные $M_i,i=\overline{1,3}$, не зависящие от T, для которых справедливы оценки

$$0<u(t,x)\leqslant M_1,(t,x)\in D, \tag{10}$$

$$0<w(t,x)\leqslant M_2(M_1),(t,x)\in Q, \tag{11}$$

$$0<v_0<v(t,x)\leqslant M_3(M_1),(t,x)\in Q, \tag{12}$$

$$0\leqslant\dot{s}(t)\leqslant M_4=d_1(0)N,0\leqslant t\leqslant T, \tag{13}$$

где $N\geqslant\max\left\{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant s_0}\frac{|u_0|}{s_0-x},\max\limits_{s_0\leqslant x\leqslant l}|u_x(t,x)|\right\}$.

Доказательство.} Для каждого уравнения системы (1)-(3) сформулируем соответствующую задачу и будем поэтапно исследовать:

$$(A)\begin{cases} u_t=(d_1(u)u_x)_x+c_1u_x-K_0u+f_0(u,w,v),(t,x)\in D,\\ u(0,x)=u_0(x),0\leqslant x\leqslant s_0,u(0,x)=0,s_0\leqslant x\leqslant l,\\ u_x(t,0)=0,u(t,s(t))=0,u(t,x)=0,s(t)\leqslant x\leqslant l,0\leqslant t\leqslant T,\\ \dot{s}(t)=-d_1(0)u_x(t,s(t)),0\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

где $f_0(u,w,v)=u\left[K_1v(M_1-u)\frac{1+K_2u}{1+K_3w}\right]$;

$$(B)\begin{cases} w_t=(d_2(w)w_x)_x+c_2w_x-K_4w+u,(t,x)\in Q,\\ w(0,x)=w_0(x),0\leqslant x\leqslant l,\\ w_x(t,0)=w_x(t,l)=0,0\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

$$(C)\begin{cases} v_t=(d_3(v)v_x)_x+c_3v_x+K_6v+K_5u^2,(t,x)\in Q,\\ v(0,x)=v_0(x),0\leqslant x\leqslant l,\\ v_x(t,0)=v_x(t,l)=0,0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

Из задачи (C) по принципу максимума непосредственно следует, что $v(t,x)>0$ в Q. Далее можно записать оценку $0<v(t,x)\leqslant m_1\max\limits_Q u^2+\|v_0\|$, которая будет уточнена после установления оценки для $u(t,x)$.

Из задачи (B) можно заключить, что

$$\max_Q |w| \leqslant m_2 \max_Q |u|. \tag{14}$$

В частности, если $u(t,x)>0$, то $w(t,x)>0$. Здесь $m_i, i=1,2$ - известные постоянные.

Рассмотрим задачу (A). Так как $u_0(x)>0$, то при малых значениях t_0, в промежутке $0\leqslant t\leqslant t_0$ имеем $u(t,x)>0$. Если в некоторой внутренней точке $P=(t_0,x_0), U(P)=0$, то из уравнения получается противоречие. Далее, предполагаем, что $0<u(t,x)<M_1$ и пусть в некоторой точке $u(t_1,x_1)=M_1$. Это будет положительным максимумом в промежутке $0\leqslant t\leqslant t_1$. Тогда опять в точке (t_1,x_1) из уравнения получается противоречие. В итоге имеем

$$0<u(t,x)\leqslant M_1,(t,x)\in D, \tag{15}$$

$$0<v^*<v_0(x)<v(t,x)\leqslant m_1\cdot M_1^2+\| v_0 \|= M_3,(t,x)\in D, \tag{16}$$

$$0<w(t,x)\leqslant m_2\cdot M_1+\| w_0 \|= M_4,(t,x)\in D. \tag{17}$$

С учетом условий $u(t,s(t))=0$ и (15), находим $u_x(t,s(t))\leqslant 0$. Следовательно, из (6) получим $\dot{s}(t)\geqslant 0$.Теперь оценим $u_x(t,s(t))$ снизу. Уравнение для $u(t,x)$ перепишем в виде

$$d_1(u)u_{xx}-u_t+d_1'(u)u_x^2+c_1u_x+c_0(t,x)u=0, \tag{18}$$

где $c_0(t,x)=K_1v(M_1-u)\dfrac{1+K_1u}{1+K_3w}-K_0$ - ограниченная функция, неположительность которой обеспечивается за счет выбора K_0.

В задаче (A) с учетом (18), произведя замену $U(t,x)=u(t,x)+N(x-s(t))$ находим

$$\begin{cases} d_1U_{xx}-U_t+d_1'u_x^2+c_1U_x+c_0U=N\dot{s}(t)-c_0N(s(t)-x)+c_1N\geqslant 0,\\ U_x(t,0)=N>0, U(t,s(t))=0, U(0,x)=u_0(x)+N(x-s_0)\leqslant 0.\end{cases}$$

Отсюда по принципу максимума $U(t,x)\leqslant 0, U_x(t,s(t))\geqslant 0$. Следовательно, $u(t,x)\leqslant N(s(t)-x), -u_x(t,s(t))\leqslant N$.

Тогда из условия Стефана (6) имеем $\dot{s}(t)\leqslant M_4=d_1(0)N.$

Теорема 1 доказана.

Чтобы применять результаты работы [13], перепишем задачу (A) в виде

$$u_t=d_1(u)u_{xx}+b(u,u_x,w,v), \tag{19}$$

$$u_x(t,0)=0, u(t,s(t))=0, 0\leqslant t\leqslant T, \tag{20}$$

$$u(0,x)=0, 0\leqslant x\leqslant s_0, \tag{21}$$

где $b_1(\cdot)=d_1'(u)u_x^2+c_1u_x+f_1(u,w,v,u_0(x)), f_1=f_0-K_0u$.

Теорема 2. Пусть функция $u(t,x)$ непрерывна в $\bar{Q}$ вместе с производной u_x и удовлетворяет условиям (19)-(21); предположим, что непрерывные функции $d_1(u)$ и $b(u,u_x,w,v)$ для $(t,x)\in\bar{D}, |u|\leqslant M_1, |w|\leqslant M_2, |v|\leqslant M_3$ и произвольных $u_x(t,x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{|b(u,u_x,w,v)|}{d_1(u)}\leqslant K(u_x^2+1).$$

Тогда

$$|u_x(t,x)|\leqslant M_5(\bar{M}),(t,x)\in\bar{D}. \tag{22}$$

И если еще известно, что $u(t,x)$ обладает в D суммируемыми с квадратом обобщенными производными u_{tx}, u_{xx}, то

$$|u|_{1+\alpha}^{\bar{D}} \leqslant M_6(M_5, \bar{M}), \quad |u|_{2+\beta}^{\bar{D}} \leqslant M_7(M_5, M_6, \bar{M}),$$

где $\bar{M} = \max(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

Лемма 1. Существует положительная постоянная $\gamma > 0$, не зависящая от T, такая, что при $u_0(x) \geqslant \gamma(s_0 - x)(\frac{3}{2}s_0 - x)$ имеет место

$$\dot{s}(t) \geqslant \gamma_1 > 0, 0 \leqslant t < T,$$

где γ - достаточно малое положительное число, $\gamma_1 = \gamma s_0 d_1(0)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решение задачи (1)-(9) единственно.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теорем 2 и теоремы 3. Тогда существует решение $u(t,x) \in C^{2+\alpha}(\bar{D}), w(t,x) \in C^{2+\alpha}(\bar{D}), v(t,x) \in C^{2+\alpha}(\bar{Q}), s(t) \in C^{1+\alpha}(0 \leqslant t \leqslant T^*)$ задачи (1)-(9), причем значение T^* определяется из условия $\lim_{t \to T^*} s(t) = l.$

Замечание. Применение систем параболических уравнений в различных областях естествознания рассмотрены в [14].

Литература:

1. Chaplain M., Lolas G., Mathematical modeling of cancer invasion of tissue: dynamic heterogeneity, Network and Heterogeneous Media, Vol.1, No.3, 2006.
2. Keller E.F., Segel L.A., Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, Journal of Theoretical Biology, Vol.26, 1970.
3. Gatenby R.A., Gawlinski E.T., A reaction diffusion model of cancer invasion, \emph{Cancer Research}, Vol.56, No.24, 1996.
4. Walker C., Webb G.F., Global existence of classical solutions for a haptotaxis model, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol.38, No.5, 2007.
5. Chaplain M., Anderson A., Mathematical modeling of tissue invasion, Chapman & Hall/CRT, 2003, pp.267-297.
6. Tao Y., Global existence of classical solutions to a combined chemotaxis-haptotaxis model with logistic source, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.354, 2009.
7. Tao Y., Cui C., A density-dependent chemotaxis-haptotaxis system modeling cancer invasion, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.367, 2010.
8. Ладыженская О.А, Солонников В.А, Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. -М.: Наука, 1967.
9. Zarnitsina V.I., et al. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation // Chaos. 2001. -T.11, №1.
10. Атауллаханов Ф.И. и др. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизация в модели свертывания крови // УФН. 2007. -Т.177, №1.
11. Lobanov A.I., Nikolaev A.V., Starozhilova T.K. Mathematical model of Fibrin polymerization // Math.Model.Nat.Phenom.,2001,v.6,N7.
12. Лобанов А.И.Полимеризации фибрина как волна фазового перехода. Математическая модель// ЖВМиМФ.-2016. -Т.58. -№6.
13. Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Труды Моск. Матем. общ.ва. -Т.16 (1967).
14. Pao C.V.. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York, 1992.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).