

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2019

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

| | |
|--|----|
| Ю.П. Апаков, А.Х. Жураев Каррали характеристикали бешинчи тартибли бир тенгламанинг чекли соҳадаги ечими ҳақида | 5 |
| М.Мамажонов, С.М. Мамажонов Бешбурчакли соҳадаги тўртинчи тартибли параболик – гиперболик турдаги тенглама учун битта чегаравий масала ҳақида | 11 |
| Ж.О.Тахиров Амалий математиканинг баъзи замонавий муаммолари ҳақида | 19 |

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

| | |
|--|----|
| Максудов Р.Х., Джураев А., Шухратов Ш., Холдоров Ш Пахта тозалагичнинг ишчи органлари динамикасини ўрганиш | 27 |
| О.Қ. Деҳқонова Умумий ўрта таълим мактабларида физика ва математика фанлари узвийлигининг таҳлили | 33 |

КИМЁ

| | |
|--|----|
| О.Эргашев, М.Коххаров, Э.Абдурахмонов СаА (М-22) цеолитида карбонат ангидрид гази адсорбциясининг энергетикаси | 36 |
|--|----|

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

| | |
|---|----|
| М.Ҳолиқов, Ё.Аҳмедова Фарғона водийсидаги қушларнинг географик тарқалиши ва муҳофазаси | 41 |
| Х.М. Шодмонов, Н.З. Сотволдиев, И.А.Ақбаров Уй шароитида анордан шарбат ва компот тайёрлаш технологияси | 43 |

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

| | |
|--|----|
| Ғ.Юлдашев, Г.Сотиболдиева Суғориладиган қолмақалланган оч тусли бўз тупроқлар агрокимёвий хоссаларининг ўзгариши | 46 |
| М.Т.Исағалиев, З.Ж.Исомиддинов Суғориладиган сур тусли қўнғир тупроқлар биогеокимёси | 51 |
| В.Ю.Исақов, А.Н.Хошимов Сўх конус ёйилмаси тупроқларининг экологик мелиоратив ўзгаришлари | 57 |

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

| | |
|--|----|
| О.Умаров Худудларда иқтисодий мустаҳкамлик заҳирасини яратишнинг самарадорлиги | 61 |
|--|----|

ТАРИХ

| | |
|---|----|
| З.Й.Эсонов Фарғона водийси ҳунармандларининг пирлар билан боғлиқ эътиқодий қарашлари | 63 |
| А.Абдухалимов Мустақиллик йилларида водий вилоятларида оналик ва болаликни муҳофаза қилиш муаммолари | 67 |
| М.М.Темирова Фарғона вилоят радиоси тарихига доир айрим мулоҳазалар | 70 |
| Ш.Махмудов Қўқон хонлигида хорижий давлатларнинг элчиларини қабул қилиш: анъаналар ва ўзига хослик | 74 |
| А.Юлдашев Мустақиллик йилларида Ўзбекистонда раҳбар ва бошқарув кадрлар тайёрлаш тизимининг тадқиқотларида ақс этиши | 77 |

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

| | |
|--|----|
| М.М.Юлдашев, Ш.А.Рахимов Европа мамлакатларида ёшлар сиёсати: амалиёт ва тажриба | 80 |
| З.Р.Қадирова, А.А.Қамбаров Ижтимоий фикрлар тарихида тафаккур услуби масаласи | 84 |
| Р.Рўзиева, Н.Эшонқулова, Н.Бобоназарова Илмий билиш бахт-саодатга интилиб, ахлоқий маданияти юксалишида муҳим омил | 87 |

КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ БЕШИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ТЕНГЛАМАНИНГ ЧЕКЛИ
СОҶАДАГИ ЕЧИМИ ҲАҚИДА

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С
КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

ON A SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM OF FIFTH ORDER EQUATION WITH
MULTIPLE CHARACTERISTICS IN FINITE DOMAIN

Ю.Апаков, А.Жураев

Аннотация

Бешинчи тартибли $\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ тенглама учун $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ соҳада бир масаланинг ечими ўрганилган. Ечимнинг ягоналиги энергия интегралли усули билан, ечимнинг мавжудлиги эса Фурье усулида кўрсатилган.

Аннотация

Для уравнения $\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ исследована одна краевая задача в области $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$. Единственность решения доказана методом интеграла энергии, существование решения построено методом Фурье.

Annotation

For the equation $\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, it was considered one boundary problem in the domain $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$. Uniqueness of the solution was proven with the method of the integral of energy. The solution was constructed with the method of Fourier.

Таянч сўз ва иборалар: юқори тартибли тенглама, каррали характеристика, хос қиймат, хос функция, Фурье усули, функционал қатор, текис яқинлашиш.

Ключевые слова и выражения: уравнение высокого порядка, кратные характеристики, собственное значение, собственная функция, метод Фурье, функциональный ряд, равномерная сходимость.

Keywords and expressions: higher order equation, multiple characteristics, eigen values, eigen functions, Fourier method, functional series, even convergence.

I. Постановка задачи.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Будем говорить, что $U(x, y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D и принадлежит классу $C_{x,y}^{5,2}(D) \cap C_{x,y}^{4,1}(\bar{D})$.

Задача А. Найти регулярное решение уравнения (1) в области D удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x, 0) = 0, \quad U_y(x, 1) = 0; \quad (2)$$

$$\begin{cases} U(0, y) = \varphi_1(y), & U_x(0, y) = \varphi_2(y); \\ U(1, y) = \varphi_3(y), & U_x(1, y) = \varphi_4(y), & U_{xx}(1, y) = \varphi_5(y), \end{cases} \quad (3)$$

где $\varphi_j(y), j = \overline{1,5}$ - заданные функции, причем $\varphi_j(y) \in C^4[0,1]$,
 $\varphi_j'(0) = \varphi_j'(1) = \varphi_j''(0) = \varphi_j''(1) = 0, j = \overline{1,5}$.

Ю.Апаков - Наманганский инженерно-строительный институт, доктор физико-математических наук, профессор.

А.Жураев - Наманганский инженерно-строительный институт, старший преподаватель.

Отметим, что в работе [1,1-45] исследовано уравнение

$$\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} U(x,y) + (-1)^n \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y) = f(x,y)$$

с различными краевыми условиями. В этой работе при решении краевых задач использовался аппарат теории потенциалов. Также в работе [2,44-51] методом Фурье исследована аналогичная задача для уравнения третьего порядка. В работах [3,21-28;4,14-18] для уравнения (1) исследованы различные краевые задачи в полу бесконечных областях.

II. Единственность решения

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача A имеет два решения $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$. Тогда функция $U(x,y) = U_1(x,y) - U_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям.

Докажем, что $U(x,y) = 0$ в \bar{D} .

В области D справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(UU_{xxx}) - \frac{\partial}{\partial x}(U_x U_{xxx}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(U_{xx}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(UU_y) - U_y^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество по области D , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 U(1,y)U_{xxx}(1,y)dy - \int_0^1 U(0,y)U_{xxx}(0,y)dy - \int_0^1 U_x(1,y)U_{xxx}(1,y)dy + \\ & + \int_0^1 U_x(0,y)U_{xxx}(0,y)dy + \frac{1}{2} \int_0^1 U_{xx}^2(1,y)dy - \frac{1}{2} \int_0^1 U_{xx}^2(0,y)dy + \\ & + \int_0^1 U(x,1)U_y(x,1)dx - \int_0^1 U(x,0)U_y(x,0)dx - \iint_D U_y^2(x,y)dx dy = 0. \end{aligned}$$

Учитывая однородные краевые условия задачи A , из последнего получим

$$\frac{1}{2} \int_0^1 U_{xx}^2(0,y)dy + \iint_D U_y^2(x,y)dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что $U_y(x,y) = 0$. Тогда $U(x,y) = f(x)$. В силу условия $U(x,0) = 0$ из последнего следует, что $f(x) \equiv 0$. Следовательно, $U(x,y) = 0$.

III. Существование решения

Решение задачи будем искать методом Фурье

$$U(x,y) = X(x)Y(y). \quad (4)$$

Поставляя (4) в (1), получим

$$X^{(5)} - \lambda^5 X = 0, \quad (5)$$

$$Y'' + \lambda^5 Y = 0, \quad (6)$$

Согласно (2), (4) и (6), имеем следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^5 Y = 0, & 0 < y < 1; \\ Y(0) = 0, & Y'(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Нетривиальные решения задачи (7) существуют при $\lambda > 0$ и эти собственные значения равны [5,735] $\lambda_n = \left[\frac{1}{2} \pi (1+2n) \right]^{2/5}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Собственными функциями, соответствующими этим собственным значениям, являются функции

$$Y_n(y) = C_n \sin \left[\frac{\pi}{2} (1+2n)y \right]. \quad (8)$$

Как и в работе [6,14-23] можно доказать ортогональность системы функций (8). Кроме того, имеет место теорема о разложении из [7,432], т.е. функции $\varphi_j(y)$, $j = 1, 5$ можно

МАТЕМАТИКА

разлагать по собственным функциям (8). Далее, если функции $\varphi_j(y)$, $j = \overline{1,5}$ интегрируема в отрезке $[0;1]$, то её разложение ведет себя (в отношении сходимости) так же, как и обычный тригонометрический ряд Фурье [8].

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + e^{\lambda \alpha_2 x} (C_2 \cos \lambda \beta_2 x + C_3 \sin \lambda \beta_2 x) + e^{-\lambda \alpha_2 x} (C_4 \cos \lambda \beta_1 x + C_5 \sin \lambda \beta_1 x), \quad (9)$$

где $\alpha_1 = \cos \theta_1$, $\beta_1 = \sin \theta_1$, $\alpha_2 = \cos \theta_2$, $\beta_2 = \sin \theta_2$, $\theta_1 = \pi / 5$, $\theta_2 = 2\pi / 5$, C_j , $j = \overline{1,5}$ - произвольные постоянные.

В силу линейности и однородности уравнения (1), решение задачи ищем в виде

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \quad (10)$$

Функция, определяемая рядом (10) удовлетворяет условиям (2), так как их удовлетворяют все члены ряда. Удовлетворив функцию (10) условиям (3), получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_{1n} + C_{2n} + C_{4n} = A_{1n}, \\ C_{1n} + \cos \theta_2 C_{2n} + \sin \theta_2 C_{3n} - \cos \theta_1 C_{4n} + \sin \theta_1 C_{5n} = \frac{A_{2n}}{\lambda_n}, \\ C_{1n} e^{\lambda_n} + C_{2n} e^{\lambda_n \alpha_2} \cos \lambda_n \beta_2 + C_{3n} e^{\lambda_n \alpha_2} \sin \lambda_n \beta_2 + C_{4n} e^{-\lambda_n \alpha_1} \cos \lambda_n \beta_1 + C_{5n} e^{-\lambda_n \alpha_1} \sin \lambda_n \beta_1 = A_{3n}, \\ C_{1n} e^{\lambda_n} + C_{2n} e^{\lambda_n \alpha_2} \cos(\lambda_n \beta_2 + \theta_2) + C_{3n} e^{\lambda_n \alpha_2} \sin(\lambda_n \beta_2 + \theta_2) - C_{4n} e^{-\lambda_n \alpha_1} \cos(\lambda_n \beta_1 - \theta_1) - \\ - C_{5n} e^{-\lambda_n \alpha_1} \sin(\lambda_n \beta_1 - \theta_1) = \frac{A_{4n}}{\lambda_n}, \\ C_{1n} e^{\lambda_n} + C_{2n} e^{\lambda_n \alpha_2} \cos(\lambda_n \beta_2 + 2\theta_2) + C_{3n} e^{\lambda_n \alpha_2} \sin(\lambda_n \beta_2 + 2\theta_2) + C_{4n} e^{-\lambda_n \alpha_1} \cos(\lambda_n \beta_1 - 2\theta_1) + \\ + C_{5n} e^{-\lambda_n \alpha_1} \sin(\lambda_n \beta_1 - 2\theta_1) = \frac{A_{5n}}{\lambda_n^2}, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$A_{jn} = 2 \int_0^1 \varphi_j(y) \sin\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2}\right) y dy, \quad j = \overline{1,5}. \quad (12)$$

Решив систему (11), получим $C_{jn} = \Delta_j / \Delta$, $j = \overline{1,5}$.

Покажем, что $\Delta \neq 0$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма. Краевая задача

$$\begin{cases} X^{(5)} - \lambda^5 X = 0, \quad 0 < x < 1; \\ X(0) = X'(0) = X(1) = X'(1) = X''(1) = 0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство: Предположим обратное, пусть $X(\delta) \neq 0$. Рассмотрим тождество

$$X(X^{(5)} - \lambda^5 X) = 0 \quad \text{или}$$

$$\left[XX^{(4)} - X'X''' + \frac{1}{2}(X'')^2 \right]' - \lambda^5 X^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество по области интервала $0 < x < 1$, имеем

$$\int_0^1 \left[XX^{(4)} - X'X''' + \frac{1}{2}(X'')^2 \right] dx - \lambda^5 \int_0^1 X^2(x) dx = 0,$$

$$\left[XX^{(4)} - X'X''' + \frac{1}{2}(X'')^2 \right]_0^1 - \lambda^5 \int_0^1 X^2(x) dx = 0,$$

$$X(1)X^{(4)}(1) - X(0)X^{(4)}(0) - X'(1)X'''(1) + X'(0)X'''(0) +$$

$$+ \frac{1}{2}[X''(1)]^2 - \frac{1}{2}[X''(0)]^2 - \lambda^5 \int_0^1 X^2(x) dx = 0.$$

Из последнего, учитывая краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}[X''(0)]^2 + \lambda^5 \int_0^1 X^2(x) dx = 0,$$

так как $\lambda > 0$, то $X(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что система уравнений (11) имеет единственное решение.

Детерминант этой системы имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{2 \times 3} & B_{2 \times 2} \\ C_{3 \times 3} & D_{3 \times 2} \end{vmatrix},$$

где

$$A_{2 \times 3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \end{vmatrix}, \quad B_{2 \times 2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \end{vmatrix},$$

$$C_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n \alpha_2} \cos \lambda_n \beta_2 & e^{\lambda_n \alpha_2} \sin \lambda_n \beta_2 \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n \alpha_2} \cos(\lambda_n \beta_2 + \theta_2) & e^{\lambda_n \alpha_2} \sin(\lambda_n \beta_2 + \theta_2) \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n \alpha_2} \cos(\lambda_n \beta_2 + 2\theta_2) & e^{\lambda_n \alpha_2} \sin(\lambda_n \beta_2 + 2\theta_2) \end{vmatrix},$$

$$D_{3 \times 2} = \begin{vmatrix} e^{-\lambda_n \alpha_1} \cos \lambda_n \beta_1 & e^{-\lambda_n \alpha_1} \sin \lambda_n \beta_1 \\ -e^{-\lambda_n \alpha_1} \cos(\lambda_n \beta_1 - \theta_1) & -e^{-\lambda_n \alpha_1} \sin(\lambda_n \beta_1 - \theta_1) \\ e^{-\lambda_n \alpha_1} \cos(\lambda_n \beta_1 - 2\theta_1) & e^{-\lambda_n \alpha_1} \sin(\lambda_n \beta_1 - 2\theta_1) \end{vmatrix}.$$

Найдем самую большую степень экспоненты, входящей при вычислении детерминанта Δ . Так как в детерминанте $C_{3 \times 3}$ у всех экспонент степени положительны, то, очевидно, самая большая степень экспоненты получается при вычислении произведения следующих определителей:

$$|C_{3 \times 3}| \cdot |B_{2 \times 2}|.$$

Вычислим каждый определитель в отдельности.

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\cos \theta_1 & \sin \theta_1 \end{vmatrix} = \sin \theta_1$$

$$C = \begin{vmatrix} e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n \alpha_2} \cos \lambda_n \beta_2 & e^{\lambda_n \alpha_2} \sin \lambda_n \beta_2 \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n \alpha_2} \cos(\lambda_n \beta_2 + \theta_2) & e^{\lambda_n \alpha_2} \sin(\lambda_n \beta_2 + \theta_2) \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n \alpha_2} \cos(\lambda_n \beta_2 + 2\theta_2) & e^{\lambda_n \alpha_2} \sin(\lambda_n \beta_2 + 2\theta_2) \end{vmatrix} = 4e^{\lambda_n + 2\lambda_n \alpha_2} \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2}.$$

Следовательно,

$$\Delta = e^{\lambda_n + 2\lambda_n \alpha_2} K + f(\lambda_n),$$

где

$$K = 4 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin^2 \frac{\theta_2}{2},$$

$$f(\lambda_n) = o\left(e^{\lambda_n + 2\lambda_n \alpha_2}\right) \text{ при } \lambda_n \rightarrow +\infty.$$

Оценим Δ :

$$|\Delta| = e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \left| K + e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f(\lambda_n) \right|.$$

Так как

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow \infty} e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f(\lambda_n) = 0,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < K \quad \exists N_1 \mid \forall n > N_1 \Rightarrow \left| e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f(\lambda_n) \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\left| K + e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f(\lambda_n) \right| > K - \left| e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f(\lambda_n) \right| > K - \varepsilon.$$

Введем обозначение:

$$M_1 = \min_{n=1, N_1} \left| K + e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f(\lambda_n) \right|.$$

Согласно лемме, $M_1 \neq 0$. Поэтому

$$\frac{1}{|\Delta|} \leq \frac{1}{M e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}},$$

где

$$M = \min \{ M_1; K - \varepsilon \}.$$

Теперь получим оценки для C_{jn} , $j = \overline{1, 5}$. Вычисления показывают, что справедливы следующие оценки для алгебраических дополнений $|\Delta_j|$, $j = \overline{1, 5}$:

$$\begin{aligned} |\Delta_1| &\leq M_1 e^{2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|, \quad |\Delta_2| \leq M_2 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|, \quad |\Delta_3| \leq M_3 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|, \\ |\Delta_4| &\leq M_4 e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|, \quad |\Delta_5| \leq M_5 e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}| \end{aligned}$$

где

$$|A_{jn}| \leq \frac{2}{(\pi n)^4} \int_0^1 |\varphi_j^{(4)}| dy \leq \frac{S_j}{n^4}, \quad M_j - const > 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

Отсюда, для коэффициентов C_{jn} получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |C_{1n}| &= \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} \leq \frac{M_1 e^{2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|}{M e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_1}{e^{\lambda_n} n^4}, \quad |C_{2n}| = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|} \leq \frac{M_2 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|}{M e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_2}{e^{\lambda_n\alpha_2} n^4}, \\ |C_{3n}| &= \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|} \leq \frac{M_3 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|}{M e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_3}{e^{\lambda_n\alpha_2} n^4}, \quad |C_{4n}| = \frac{|\Delta_4|}{|\Delta|} \leq \frac{M_4 e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|}{M e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_4}{n^4}, \\ |C_{5n}| &= \frac{|\Delta_5|}{|\Delta|} \leq \frac{M_5 e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^5 |A_{jn}|}{M e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_4}{n^4}. \end{aligned}$$

Докажем равномерную сходимость ряда (10) в области D .

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[|C_{1n}| e^{\lambda_n x} + (|C_{2n}| + |C_{3n}|) e^{\lambda_n\alpha_2 x} + (|C_{4n}| + |C_{5n}|) e^{-\lambda_n\alpha_2 x} \right] \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{N_1}{e^{\lambda_n(1-x)} n^4} + \frac{N_2}{e^{\lambda_n\alpha_2(1-x)} n^4} + \frac{N_3}{e^{\lambda_n\alpha_2(1-x)} n^4} + \frac{N_4}{n^4} + \frac{N_5}{n^4} \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N}{n^4} < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично показывается равномерная сходимость ряда, составленного из частных производных по переменной x до пятого порядка включительно.

Для $U_{yy}(x, y)$ имеем оценку

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 X_n(x) Y_n(y) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 \frac{N}{n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 N < \infty.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^5 U}{\partial x^5} \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} X^{(5)}(x) Y(y) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |X^{(5)}(x)| |Y(y)| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^5 |X(x)| |Y(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n)^2 \frac{N}{n^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n} \right)^2 N < \infty. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. Если $\varphi_j(y) \in C^4[0, 1]$ и $\varphi_j'(0) = \varphi_j'(1) = \varphi_j''(0) = \varphi_j''(1) = 0$, $j = \overline{1, 5}$, то решение задачи A существует и представляется в виде (10).

Литература:

1. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple. Rendiconti del Sem. Mat. della Univ. di Padova 1961. Vol.31.
2. Иргашев Ю., Апаков Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // УзМЖ, 2006, №2.
3. Апаков Ю. П., Жураев А. Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области // УзМЖ, 2009, №4.
4. Жураев А. Х. Краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в неограниченной области // Докл. АНРУз, 2009, № 6.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1977.
6. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // УзМЖ. – Т., 2007. - № 1.
7. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. - М.: Наука, 1988.
8. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. В 2-х т. - Т. 1. -М.: Иностранная литература, 1960.

(Рецензент: А. Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).