ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2019

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.951.2

КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ БЕШИНЧИ ТАРТИБЛИ БИР ТЕНГЛАМАНИНГ ЧЕКЛИ СОҲАДАГИ ЕЧИМИ ҲАҚИДА

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

ON A SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM OF FIFTH ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS IN FINITE DOMAIN

Ю.Апаков, А.Жураев

Аннотация

Бешинчи тартибли $\frac{\partial^5 U}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ *тенглама учун* $D=\{(x,y): 0<x,y<1\}$ *соҳада бир масаланинг ечими ўрганилган. Ечимнинг ягоналиги энергия интеграли усули билан, ечимнинг мавжудлиги эса Фурье усулида кўрсатилган .*

Аннотация

Для уравнения $\frac{\partial^5 U}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ *исследована одна краевая задача в области* $D=\{(x,y): 0<x,y<1\}$ *. Единственность решения доказана методом интеграла энергии, существование решения построено методом Фурье.*

Annotation

For the equation $\frac{\partial^5 U}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$ *, it was considered one boundary problem in the domain* $D=\{(x,y): 0<x,y<1\}$ *. Uniqueness of the solution was proven with the method of the integral of energy. ThesolutionwasconstructedwiththemethodofFourier.*

***Таянч сўз ва иборалар**: юқори тартибли тенглама, каррали характеристика, хос қиймат, хос функция, Фурье усули, функционал қатор, текис яқинлашиш.*

***Ключевые слова и выражения**: уравнение высокого порядка, кратные характеристики, собственное значение, собственная функция, метод Фурье, функциональный ряд, равномерная сходимость.*

***Keywords and expressions**: higher order equation, multiple characteristics, eigen values, eigen functions, Fourier method, functional series, even convergence.*

I. Постановка задачи.

В области $D=\{(x,y): 0<x,y<1\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5 U}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

Будем говорить, что $U(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D и принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}(D)\cap C^{4,1}_{x,y}(\bar{D})$.

Задача A**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x,0)=0,\ U_y(x,1)=0; \tag{2}$$

$$\begin{cases} U(0,y)=\varphi_1(y),\ U_x(0,y)=\varphi_2(y); \\ U(1,y)=\varphi_3(y),\ U_x(1,y)=\varphi_4(y),\ U_{xx}(1,y)=\varphi_5(y), \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_j(y), j=\overline{1,5}$ -заданные функции, причем $\varphi_j(y)\in C^4[0,1]$, $\varphi_j'(0)=\varphi_j{}'(1)=\varphi_j'''(0)=\varphi_j'''(1)=0, j=\overline{1,5}$.

Ю.Апаков - Наманганский инженерно-строительный институт, доктор физико- математических наук, профессор.
А.Жураев - Наманганский инженерно-строительный институт, старший преподаватель.

Отметим, что в работе [1,1-45] исследовано уравнение

$$\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}U(x,y)+(-1)^n\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x,y)=f(x,y)$$

с различными краевыми условиями. В этой работе при решении краевых задач использовался аппарат теории потенциалов. Также в работе [2,44-51] методом Фурье исследована аналогичная задача для уравнения третьего порядка. В работах [3,21-28;4,14-18] для уравнения (1) исследованы различные краевые задачи в полу бесконечных областях.

II. Единственность решения

Теорема 1. Если задача $\grave{A}$ имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача A имеет два решения $U_1(x,y)$ и $U_2(x,y)$. Тогда функция $U(x,y)=U_1(x,y)-U_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $U(x,y)=0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(UU_{xxxx})-\frac{\partial}{\partial x}(U_xU_{xxx})+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(U_{xx}^2)+\frac{\partial}{\partial y}(UU_y)-U_y^2=0.$$

Интегрируя это тождество по области D, имеем

$$\int_0^1 U(1,y)U_{xxxx}(1,y)dy-\int_0^1 U(0,y)U_{xxxx}(0,y)dy-\int_0^1 U_x(1,y)U_{xxx}(1,y)dy+$$

$$+\int_0^1 U_x(0,y)U_{xxx}(0,y)dy+\frac{1}{2}\int_0^1 U_{xx}^2(1,y)dy-\frac{1}{2}\int_0^1 U_{xx}^2(0,y)dy+$$

$$+\int_0^1 U(x,1)U_y(x,1)dx-\int_0^1 U(x,0)U_y(x,0)dx-\iint_D U_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Учитывая однородные краевые условия задачи $\grave{A}$, из последнего получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 U_{xx}^2(0,y)dy+\iint_D U_y^2(x,y)dxdy=0.$$

Отсюда следует, что $U_y(x,y)=0$. Тогда $U(x,y)=f(x)$. В силу условие $U(x,0)=0$ из последнего следует, что $f(x)\equiv 0$. Следовательно, $U(x,y)=0$.

III. Существование решения

Решение задачи будем искать методом Фурье

$$U(x,y)=X(x)Y(y). \tag{4}$$

Поставляя (4) в (1), получим

$$X^{(5)}-\lambda^5X=0, \tag{5}$$

$$Y''+\lambda^5Y=0, \tag{6}$$

Согласно (2), (4) и (6), имеем следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{cases} Y''+\lambda^5Y=0,\ 0<y<1; \\ Y(0)=0,\ Y'(1)=0. \end{cases} \tag{7}$$

Нетривиальные решения задачи (7) существуют при $\lambda>0$ и эти собственные значения равны [5,735] $\lambda_n=\left[\frac{1}{2}\pi(1+2n)\right]^{2/5}, \quad n=1,2,3,...$.

Собственными функциями, соответствующими этим собственным значениям, являются функции

$$Y_n(y)=C_n\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2n)y\right]. \tag{8}$$

Как и в работе [6,14-23] можно доказать ортогональность системы функций (8). Кроме того, имеет место теорема о разложении из [7,432], т.е. функции $\varphi_j(y),\ j=\overline{1,5}$ можно разлагать по собственным функциям (8). Далее, если функции $\varphi_j(y),\ j=\overline{1,5}$ интегрируема в отрезке [0;1], то её разложение ведет себя (в отношении сходимости) так же, как и обычный тригонометрический ряд Фурье $[8]$.

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$X(x)=C_1e^{\lambda x}+e^{\lambda a_2 x}\left(C_2\cos\lambda\beta_2 x+C_3\sin\lambda\beta_2 x\right)+ \\ +e^{-\lambda a_2 x}\left(C_4\cos\lambda\beta_1 x+C_5\sin\lambda\beta_1 x\right), \tag{9}$$

где $\alpha_1=\cos\theta_1,\ \beta_1=\sin\theta_1,\ \alpha_2=\cos\theta_2,\ \beta_2=\sin\theta_2,\ \theta_1=\pi/5,\ \theta_2=2\pi/5$, C_j, $j=\overline{1,5}$ - произвольные постоянные.

В силу линейности и однородности уравнения (1), решение задачи ищем в виде

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)\ . \tag{10}$$

Функция, определяемая рядом (10) удовлетворяет условиям (2), так как их удовлетворяют все члены ряда. Удовлетворив функцию (10) условиям (3), получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_{1n}+C_{2n}+C_{4n}=A_{1n}, \\ C_{1n}+\cos\theta_2 C_{2n}+\sin\theta_2 C_{3n}-\cos\theta_1 C_{4n}+\sin\theta_1 C_{5n}=\dfrac{A_{2n}}{\lambda_n}, \\ C_{1n}e^{\lambda_n}+C_{2n}e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\lambda_n\beta_2+C_{3n}e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\lambda_n\beta_2+C_{4n}e^{-\lambda_n\alpha_1}\cos\lambda_n\beta_1+C_{5n}e^{-\lambda_n\alpha_1}\sin\lambda_n\beta_1=A_{3n}, \\ C_{1n}e^{\lambda_n}+C_{2n}e^{\lambda_n\alpha_2}\cos(\lambda_n\beta_2+\theta_2)+C_{3n}e^{\lambda_n\alpha_2}\sin(\lambda_n\beta_2+\theta_2)-C_{4n}e^{-\lambda_n\alpha_1}\cos(\lambda_n\beta_1-\theta_1)- \\ \qquad -C_{5n}e^{-\lambda_n\alpha_1}\sin(\lambda_n\beta_1-\theta_1)=\dfrac{A_{4n}}{\lambda_n}, \\ C_{1n}e^{\lambda_n}+C_{2n}e^{\lambda_n\alpha_2}\cos(\lambda_n\beta_2+2\theta_2)+C_{3n}e^{\lambda_n\alpha_2}\sin(\lambda_n\beta_2+2\theta_2)+C_{4n}e^{-\lambda_n\alpha_1}\cos(\lambda_n\beta_1-2\theta_1)+ \\ \qquad +C_{5n}e^{-\lambda_n\alpha_1}\sin(\lambda_n\beta_1-2\theta_1)=\dfrac{A_{5n}}{\lambda_n{}^2}, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$A_{jn}=2\int_0^1\varphi_j(y)\sin\left(\frac{\pi+2\pi n}{2}\right)ydy,\ \ j=\overline{1,5}\,. \tag{12}$$

Решив систему (11),получим $C_{jn}=\Delta_j/\Delta,\ j=\overline{1,5}$.

Покажем, что $\Delta\neq0$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма. Краевая задача

$$\begin{cases} X^{(5)}-\lambda^5X=0,\ 0<x<1; \\ X(0)=X'(0)=X(1)=X'(1)=X''(1)=0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство: Предположим обратное, пусть $X(\tilde{o})\neq0$. Рассмотрим тождество

$$X\left(X^{(5)}-\lambda^5X\right)=0 \text{ или}$$

$$\left[XX^{(4)}-X'X'''+\frac{1}{2}(X'')^2\right]'-\lambda^5X^2=0\,.$$

Интегрируя это тождество по области интервала $0<x<1$, имеем

$$\int_0^1\left[XX^{(4)}-X'X'''+\frac{1}{2}(X'')^2\right]'dx-\lambda^5\int_0^1X^2(x)dx=0\,,$$

$$\left[XX^{(4)}-X'X'''+\frac{1}{2}\left(X''\right)^2\right]\Bigg|_0^1-\lambda^5\int_0^1 X^2(x)dx=0,$$

$$X(1)X^{(4)}(1)-X(0)X^{(4)}(0)-X'(1)X'''(1)+X'(0)X'''(0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[X''(1)\right]^2-\frac{1}{2}\left[X''(0)\right]^2-\lambda^5\int_0^1 X^2(x)dx=0.$$

Из последнего, учитывая краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\left[X''(0)\right]^2+\lambda^5\int_0^1 X^2(x)dx=0,$$

так как $\lambda>0$, то $X(x)\equiv 0$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что система уравнений (11) имеет единственное решение. Детерминант этой системы имеет вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_{2\times3} & B_{2\times2} \\ C_{3\times3} & D_{3\times2}\end{vmatrix},$$

где

$$A_{2\times3}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2\end{vmatrix},\quad B_{2\times2}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\end{vmatrix},$$

$$C_{3\times3}=\begin{vmatrix} e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\lambda_n\beta_2 & e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\lambda_n\beta_2 \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\left(\lambda_n\beta_2+\theta_2\right) & e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\left(\lambda_n\beta_2+\theta_2\right) \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\left(\lambda_n\beta_2+2\theta_2\right) & e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\left(\lambda_n\beta_2+2\theta_2\right)\end{vmatrix},$$

$$D_{3\times2}=\begin{vmatrix} e^{-\lambda_n\alpha_1}\cos\lambda_n\beta_1 & e^{-\lambda_n\alpha_1}\sin\lambda_n\beta_1 \\ -e^{-\lambda_n\alpha_1}\cos\left(\lambda_n\beta_1-\theta_1\right) & -e^{-\lambda_n\alpha_1}\sin\left(\lambda_n\beta_1-\theta_1\right) \\ e^{-\lambda_n\alpha_1}\cos\left(\lambda_n\beta_1-2\theta_1\right) & e^{-\lambda_n\alpha_1}\sin\left(\lambda_n\beta_1-2\theta_1\right)\end{vmatrix}.$$

Найдем самую большую степень экспоненты, входящей при вычислении детерминанта Δ. Так как в детерминанте $C_{3\times3}$ у всех экспонент степени положительны, то, очевидно, самая большая степень экспоненты получается при вычислении произведения следующих определителей:

$$\left|C_{3\times3}\right|\cdot\left|B_{2\times2}\right|.$$

Вычислим каждый определитель в отдельности.

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & \sin\theta_1\end{vmatrix}=\sin\theta_1$$

$$C=\begin{vmatrix} e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\lambda_n\beta_2 & e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\lambda_n\beta_2 \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\left(\lambda_n\beta_2+\theta_2\right) & e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\left(\lambda_n\beta_2+\theta_2\right) \\ e^{\lambda_n} & e^{\lambda_n\alpha_2}\cos\left(\lambda_n\beta_2+2\theta_2\right) & e^{\lambda_n\alpha_2}\sin\left(\lambda_n\beta_2+2\theta_2\right)\end{vmatrix}=4e^{\lambda_n+2\lambda_n\alpha_2}\sin\theta_2\sin^2\frac{\theta_2}{2}.$$

Следовательно,

$$\Delta=e^{\lambda_n+2\lambda_n\alpha_2}K+f\left(\lambda_n\right),$$

где

$$K=4\sin\theta_1\sin\theta_2\sin^2\frac{\theta_2}{2},$$

$$f\left(\lambda_n\right)=o\left(e^{\lambda_n+2\lambda_n\alpha_2}\right)\text{ при }\lambda_n\to+\infty.$$

Оценим Δ:

$$\left|\Delta\right| = e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}\left|K + e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f\left(\lambda_n\right)\right|.$$

Так как

$$\lim_{\lambda_n \to \infty} e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f\left(\lambda_n\right) = 0,$$

то

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon < K \quad \exists N_1 \big| \ \forall n > N_1 \Rightarrow \left|e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f\left(\lambda_n\right)\right| < \varepsilon .$$

Отсюда следует, что при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$\left|K + e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f\left(\lambda_n\right)\right| > K - \left|e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f\left(\lambda_n\right)\right| > K - \varepsilon .$$

Введем обозначение:

$$M_1 = \min_{n=\overline{1,N_1}} \left|K + e^{-(\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2)} f\left(\lambda_n\right)\right|.$$

Согласно лемме, $M_1 \neq 0$. Поэтому

$$\frac{1}{\left|\Delta\right|} \leq \frac{1}{Me^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}},$$

где

$M = \min\left\{M_1; K - \varepsilon\right\}$.

Теперь получим оценки для C_{jn}, $j = \overline{1,5}$. Вычисления показывают, что справедливы следующие оценки для алгебраических дополнений $\left|\Delta_j\right|, j = \overline{1,5}$:

$$\left|\Delta_1\right| \leq M_1 e^{2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|, \left|\Delta_2\right| \leq M_2 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|, \ \left|\Delta_3\right| \leq M_3 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|,$$

$$\left|\Delta_4\right| \leq M_4\, e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|, \quad \left|\Delta_5\right| \leq M_5\, e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2} \sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|$$

где

$$\left|A_{jn}\right| \leq \frac{2}{\left(\pi n\right)^4}\int_0^1\left|\varphi_j^{(4)}\right|dy \leq \frac{S_j}{n^4}, \quad M_j - const > 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Отсюда, для коэффициентов C_{jn} получим следующие оценки:

$$\left|C_{1n}\right| = \frac{\left|\Delta_1\right|}{\left|\Delta\right|} \leq \frac{M_1\, e^{2\lambda_n\alpha_2}\sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|}{Me^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_1}{e^{\lambda_n} n^4}, \quad \left|C_{2n}\right| = \frac{\left|\Delta_2\right|}{\left|\Delta\right|} \leq \frac{M_2 e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2}\sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|}{Me^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_2}{e^{\lambda_n\alpha_2} n^4}$$

$$\left|C_{3n}\right| = \frac{\left|\Delta_3\right|}{\left|\Delta\right|} \leq \frac{M_3\, e^{\lambda_n + \lambda_n\alpha_2}\sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|}{M\, e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_3}{e^{\lambda_n\alpha_2} n^4}, \left|C_{4n}\right| = \frac{\left|\Delta_4\right|}{\left|\Delta\right|} \leq \frac{M_4\, e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}\sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|}{M\, e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_4}{n^4},$$

$$\left|C_{5n}\right| = \frac{\left|\Delta_5\right|}{\left|\Delta\right|} \leq \frac{M_5\, e^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}\sum_{j=1}^{5}\left|A_{jn}\right|}{Me^{\lambda_n + 2\lambda_n\alpha_2}} \leq \frac{N_4}{n^4}.$$

Докажем равномерную сходимость ряда (10) в области D.

$$\left|u\left(x,y\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|C_{1n}\right|\left|e^{\lambda_n x}\right| + \left(\left|C_{2n}\right| + \left|C_{3n}\right|\right)\left|e^{\lambda_n\alpha_2 x}\right| + \left(\left|C_{4n}\right| + \left|C_{5n}\right|\right)\left|e^{-\lambda_n\alpha_1 x}\right|\right] \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{N_1}{e^{\lambda_n(1-x)}n^4} + \frac{N_2}{e^{\lambda_n\alpha_2(1-x)}n^4} + \frac{N_3}{e^{\lambda_n\alpha_2(1-x)}n^4} + \frac{N_4}{n^4} + \frac{N_5}{n^4}\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N}{n^4} < \infty .$$

Аналогично показывается равномерная сходимость ряда, составленного из частных производных по переменной x до пятого порядка включительно.

Для $U_{yy}(x,y)$ имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 X_n(x) Y_n(y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 \frac{N}{n^4} \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 N < \infty .$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial^5 U}{\partial x^5}\right| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty} X^{(5)}(x) Y(y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|X^{(5)}(x)\right|\left|Y(y)\right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^5 \left|X(x)\right|\left|Y(y)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^2 \frac{N}{n^4} < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 N < \infty.$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2. Если $\varphi_j(y) \in C^4[0,1]$ и $\varphi_j'(0) = \varphi_j{}'(1) = \varphi_j'''(0) = \varphi_j'''(1) = 0,\ j = \overline{1,5}$, то решение задачи A существует и представляется в виде (10).

Литература:

1. Cattabriga L. Potenziali di linia e di dominio per equazioninonparaboliche in due variabili a caratteristiche multiple. Rendicontidel Sem. Mat. della Univ. di Padova 1961. Vol.31.

2. Иргашев Ю., Апаков Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // УзМЖ, 2006, №2.

3. Апаков Ю. П., Жураев А. Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области // УзМЖ, 2009,№4.

4. Жураев А. Х. Краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в неограниченной области // Докл.АНРУз, 2009, № 6.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1977.

6. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // УзМЖ. – Т., 2007. - № 1.

7. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. - М.: Наука,1988.

8. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. В 2-х т. - Т. 1. -М.: Иностр. лит. , 1960.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).