МАТЕМАТИКА

УДК: 51/517.956

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Х.Косимов, М.Абдуолимова

Аннотация

Ушбу мақолада умумлашган Трикоми тенгламаси учун чегаравий шартда каср тартибли умумлашган оператор қатнашган битта силжишли масала ўрганилган.

Аннотация

В данной статье изучена одна задача со смещением для обобщённого уравнения Трикоми, где в краевом условии участвует обобщённый оператор дробного порядка.

Annotation

In this paper a shifting condition problem which boundary condition of it includes generalized fractional operator for the generalized Tricomi equation was investigated.

Таянч сўз ва иборалар: *умумлашган Трикоми тенгламаси, чегаравий шарт, силжишли масала, каср тартибли умумлашган оператор.*

Ключевые слова и выражения: *обобщённое уравнение Трикоми, краевые условия, задача со смещением, обобщённый оператор дробного порядка.*

Key words and expressions: *generalized Tricomi equation, boundary condition, problem with shifting condition, generalized fractional operator.*

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} = 0, \quad m = const > 0 \tag{1}$$

в области D, ограниченной характеристиками

$$AC: \; x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: \; x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки $A(0,0), B(1,0)$ и отрезком AB прямой $y = 0$.

Введем операторы дробного интегродифференцирования от функции по другой функции в следующем виде [1.788].

$$F_{0x}\begin{bmatrix} a, & b \\ c; & g(x) \end{bmatrix}\varphi(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{A}(-\tilde{n})}\displaystyle\int_0^x [g(x)-g(t)]^{-c-1} F\Big(a,b,-c;\frac{g(x)-g(t)}{g(x)}\Big)\varphi(t)g'(t)dt, & c<0 \\ \left[g(x)\right]^a \dfrac{d}{dg(x)}\left[g(x)\right]^{-a} F_{0x}\begin{bmatrix} a, & b+1 \\ c-1, & g(x) \end{bmatrix}\varphi(x), & 0<c<1 \end{cases}$$

где a, b, c – действительные числа; $g(x)$ – монотонная функция, имеющая непрерывную производную; $\varphi(x) \in C(0,1) \cap L_1(AB)$; $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера [2]; $F(a,b,z;x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [2.800].

Задача. Найти функцию $U(x,y)$ удовлетворяющую условиям:

1) $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AB)$;

2) $U(x,y)$ регулярное решение уравнения (1) в области D;

3) $U(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$U(x,0) = \tau(x), \qquad x \in \overline{AB} \tag{2}$$

Х.Н.Косимов *– ФерГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.*

М.К.Абдуолимова *– магистрант по специальностям математики ФерГУ.*

$$F_{0x}\begin{bmatrix} a,b \\ c;\, x^2 \end{bmatrix} U\left[\theta(x)\right] = a(x)U_y(x,0) + b(x),\ x \in AB \tag{3}$$

где a, b, c – действительные числа; $a(x), b(x), \tau(x)$ – заданные функции; $\theta(x)$ – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in AB$ с характеристикой AC.

Теорема: Пусть выполнены следующие условия:

1) $1-b < c < 2-b, \quad c > b > 0,\ 2\alpha = \dfrac{m}{m+2};$

2) $\nu(x) = \left(x^2\right)^{c+b+\frac{2\alpha-3}{2}} \nu_1(x),\ \nu_1(x) \in C^1(J),\ \nu_1(x) \neq 0,\ \forall x \in \overline{AB};$

3) $\tau(x) = \left(x^2\right)^{\sigma} \tau_1(x),\ \tau_1(x) \in C(\overline{J}) \cap C^3(J),\ c+b+\alpha-1 < \sigma < c+b;$

4) $a(x), b(x) \in C(\overline{J}), \left(x^2\right)^{-b} a(x) \neq 0,\ \forall x \in \overline{AB};$

Тогда задача (1) – (3) имеет бесчисленное множество решений.

Доказательство решения задачи Коши для уравнения (1) в области D имеет вид:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] \left[t(1-t)\right]^{\alpha-1} dt - \\ &- \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)} y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] \left[t(1-t)\right]^{-\alpha} dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) находим

$$\begin{aligned} U\left[\theta(x)\right] &= \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-2\alpha} D_{0x}^{-\alpha} x^{\alpha-1} \tau(x) - \\ &\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} D_{0x}^{1-\alpha} x^{-\alpha} \nu(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Пользуясь формулой (5) из условия (3), получим уравнение относительно $\nu(x) = U_y(x,0)$

$$a(x)\nu(x) + \gamma_1(x)\Phi\left[\nu(x)\right] = F(x), \quad x \in AB \tag{6}$$

здесь

$$\Phi\left[\nu(x)\right] = \frac{d}{dx^2}\psi(x) \tag{7}$$

$$\psi(x) = (x^2)^{-b} F_{0x}\begin{bmatrix} a+1,b \\ c-1;\, x^2 \end{bmatrix} D_{0x}^{\alpha-1} x^{-\alpha} \nu(x) \tag{8}$$

$$F(x) = \frac{d}{dx} x^{-b} F_{0x}\begin{bmatrix} a+1,b \\ c-1;\, x^2 \end{bmatrix} x^{1-2\alpha} D_{0x}^{-\alpha} x^{\alpha-1} \tau(x). \tag{9}$$

Для выполнения выражения (8), (9) воспользуемся преобразованием Михлина [3.312]

$$f(x) \to f^*(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \tag{10}$$

Легко доказать, что

$$x^l F_{0x}\begin{bmatrix} a,b \\ c;x \end{bmatrix}\varphi(x) \to \Gamma\begin{bmatrix} 1+c-l-s\,,\ 1-a-b-l-s \\ 1-a-b-s\,,\ 1-b-l-s \end{bmatrix}\varphi^*(s-c+l) \qquad (11)$$

$\operatorname{Re} s < \min\{1+c-l\,,1-a-b\}$

Тогда, учитывая соотношение (11) из (8), получим

$$\psi(\sqrt{x}) \to 2\Gamma\begin{bmatrix} c+b-s\,,-a-s\,,2-\alpha+2b+2c-2s \\ -a+b-s\,,1-s\,,3+2b+2c-2s \end{bmatrix}\psi^*(2s-2b-2c-\alpha+3) \qquad (12)$$

Применяя формулы [2.800]

$$\Gamma(2\beta) = 2^{2\beta-1}(\sqrt{\pi})^{-1}\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+\frac{1}{2})$$

$$G_{pq}^{mn}\left(x\left|\begin{matrix} a_1,a_2,...,a_p \\ b_1,b_2,...,b_q \end{matrix}\right.\right) \to \Gamma\begin{bmatrix} s+b_1,...,s+b_m,1-a_1-s,...,1-a_n-s \\ s+a_{n+1},...,s+a_p,1-b_{m+1}-1-s,...,b_q-s \end{bmatrix}$$

из (12) имеем соотношение

$$\psi(x) = (x^2)^{-b-c}\int_0^x (y^2)^{\frac{1-2\alpha}{2}} G_{44}^{40}\left(\frac{y^2}{x^2}\left|\begin{matrix} -a-c,\ 1-b-c,\ \frac{3}{2},\ \ 2 \\ 0,\ -a-b-c,\ \frac{2+\alpha}{2},\ \frac{3+\alpha}{2} \end{matrix}\right.\right)\nu(y)dy^2 \qquad (13)$$

$$F(x) = \gamma_2\frac{d}{dx^2}\int_0^x (y^2)^{b-c}\times$$

$$\times G_{44}^{40}\left(\frac{y^2}{x^2}\left|\begin{matrix} a-b-c,\ 1+\alpha,\ 1-b-c-\frac{\alpha}{2},\ \frac{3-\alpha}{2}-b-c \\ 1+a-b,\ \ 0\ ,\ \ 2-\alpha-b-c\ ,\ \frac{3}{2}-\alpha-b-c \end{matrix}\right.\right)\tau(y)dy^2 - b(x) \qquad (14)$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot 2^{2-\alpha}\ ,\quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\cdot 2^{1+\alpha}.$$

$G_{44}^{40}(z|)$ – функция Мейера [1.788].

Применяя к обеим частям равенства (12) оператор

$$\frac{d}{dx^2}(x^2)^{b+c}\int_0^x G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1,\ -a-1,\ b+c+\frac{\alpha}{2},\ b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1,\ -1,\ b+c+\frac{1}{2},\ b+c+1 \end{matrix}\right.\right)dt^2,$$

получим

$$(x^2)^{\frac{1-2\alpha}{2}}\nu(x) = \frac{d}{dx^2}(x^2)^{b+c}\int_0^x G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1,\ -a-1,\ b+c+\frac{\alpha}{2},\ b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1,\ -1,\ b+c+\frac{1}{2},\ b+c+1 \end{matrix}\right.\right)\psi(t)dt^2 \qquad (15)$$

$$\frac{d}{dx^2}\psi(x)+a_1(x)\cdot(x^2)^{b+c-1}\Big((b+c+1)\times$$
$$\times\int_0^x \varphi(t)G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1, & -a-1, & b+c+\frac{\alpha}{2}, & b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, & -1, & b+c+\frac{1}{2}, & b+c+1\end{matrix}\right.\right)dt^2+ \qquad (16)$$
$$+\int_0^x G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1, & -a-1, & b+c+\frac{\alpha}{2}, & b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, & -1, & b+c+\frac{1}{2}, & b+c+1\end{matrix}\right.\right)\Big)\Phi(t)\cdot t^2\cdot dt^2=F(x)$$

Из (5), (6) и (8) походим

$$\Phi(x)+a_1(x)\cdot(x^2)^{b+c-1}\Big((b+c+1)\times$$
$$\times\int_0^x G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1, & -a-1, & b+c+\frac{\alpha}{2}, & b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, & -1, & b+c+\frac{1}{2}, & b+c+1\end{matrix}\right.\right)dt^2\int_0^t \Phi(s)ds+ \qquad (16)$$
$$+\int_0^x G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1, & -a-1, & b+c+\frac{\alpha}{2}, & b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, & -1, & b+c+\frac{1}{2}, & b+c+1\end{matrix}\right.\right)\Big)\Phi(t)\cdot t^2\cdot dt^2=F(x)+g(x)$$

где

$$g(x)=(b+c+1)a_1(x)\cdot(x^2)^{b+c-1}\psi(0)\times$$
$$\times\int_0^x G_{44}^{40}\left(\frac{t^2}{x^2}\left|\begin{matrix} b+c-1, & -a-1, & b+c+\frac{\alpha}{2}, & b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, & -1, & b+c+\frac{1}{2}, & b+c+1\end{matrix}\right.\right)dt^2 \qquad (18)$$

$$a_1(x)=\gamma_1^{-1}a(x)\cdot(x^2)^{-b+\frac{2\alpha-1}{2}}.$$

Используя формулы вычисления интегралов от функции Мейера $G_{44}^{40}(z|)$, нетрудно убедиться в том, что (17) есть интегральное уравнение Вольтера 2-го ряда с ядром со слабой особенностью. Отсюда следует, что оно имеет решение. Тогда, в силу эквивалентности следует, что задача (1) – (3) разрешима.

Для доказательства неединственности решения задачи (1) – (3) достаточно показать, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (6), имеет нетривиальное решение.

После некоторых преобразований из (17) получим интегральное уравнение Вольтера 2-го ряда с правой частью $g(x)$.

В силу условия теоремы $g(x)\neq 0$, $\forall x\in\overline{AB}$.

Следовательно, существует нетривиальное решение однородного уравнения. Поэтому, согласно общей теории [4.232], неоднородное уравнение (4) имеет бесчисленное множество решений. Теорема доказана.

Литература:

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
2. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986.
3. Марычев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. – Минск: Наука, 1978.
4. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: “Физматгиз”, 1959.

(Рецензент: А.Уринов, доктор физико-математических наук, профессор).