FarDU. Ilmiy xabarlar – Scientific journal of the Fergana State University

Volume 30 Issue 3, 2024-yil DOI: 10.56292/SJFSU/vol30_iss3_2t/a332

UO‘K: 519.62:517.95

TESKARI MASALALARNI YECHISHNING CHEKLI AYIRMALAR SXEMASINI TESKARILASH USULI

ОБРАТНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

INVERSE METHOD OF FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING INVERSE PROBLEMS

Karimov Shaxobiddin Tuychiboyevich[1]

[1]Farg‘ona davlat universiteti, amaliy matematika va informatika kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari doktori.

Jahongirova Jayrona Jo‘rabek qizi[2]

[2]Farg‘ona davlat universiteti Magistratura bo‘limi “Amaliy matematika (sohalar bo‘yicha)” mutaxassisligi magistranti

Annotatsiya

Ushbu maqolada teskari masalalarni yechishning chekli ayirmalar usulidan foydalanish va chekli ayirmali sxemalarni teskarilash orqali teskari masalani echimini aniqlash jarayoni bayon qilingan.

Аннотация

В данной статье описан процесс решения обратных задач с использованием метода конечных разностей и обращения конечно-разностных схем.

Abstract

This article describes the process of solving inverse problems using the finite difference method and inverting finite difference schemes.

Kalit so’zlar: *Teskari masala, chekli ayirmalar usuli, nokorrekt masala, Dalamber formulasi*

Ключевые слова: *Обратная задача, конечно-разностный метод, некорректная задача, формула Даламбера*

Key words: *Inverse problem, finite-difference method, ill-posed problem, Dalember’s formula*

KIRISH

XX asrning o'rtalaridan boshlab "teskari qo'yilgan masalalar" atamasi -zamonaviy fanga tez kirib bormoqda. Ellik yildan sal ko'proq vaqt davomida ushbu masalalarni o'rganish natijasida ular klassik matematikaning turli sohalariga tegishli masalalarning muhim qismini (bundan tashqari, eng murakkablari, ularning nokorrektligi va chiziqli bo'lmaganligi sababli) o'z ichiga olishi mumkinligi ma'lum bo'ldi. Boshqa tomondan, teskari va nokorrekt qo'yilgan masalalar fizika, geofizika, tibbiyot, astronomiya va umuman, matematik usullar qo'llaniladigan bilimlarning barcha sohalarida tizimli o'rganish va qo'llash ob'ektiga aylangan. Gap shundaki, teskari masalalar yechimlarida o‘rganilayotgan muhitning to‘lqin tarqalish zichligi va tezligi, elastiklik parametrlari, o‘tkazuvchanlik, dielektrik va magnit o‘tkazuvchanlik kabi muhim xossalari, shuningdek, ularning xossalari va bir jinslilarning joylashuvi tavsiflanadi. Bunday ma'lumotlar fiziklar, geofiziklar, shifokorlar va umuman olganda, kirishi juda mashaqqatli yoki xavfli yoki hatto imkonsiz bo'lgan ob'ektlar va hududlarni tadqiqotchilar uchun qanchalik qiziqarli va muhimligini tushunish oson.

Teskari va nokorrekt qo'yilgan masalalar bo'yicha nashrlar XX asrning birinchi yarmida paydo bo'ldi. Ular fizika (kvant tarqalishi nazariyasining teskari masalalari), geofizika (elektr razvedkaning teskari masalalari, seysmik, potentsial nazariya), astronomiya va tabiatshunoslikning boshqa sohalari bilan bog'liq edi. Kuchli superkompyuterlarning paydo bo'lishi bilan teskari va nokorrekt qo'yilgan masalalarni qo'llash sohasi matematik usullar qo'llaniladigan deyarli barcha ilmiy sohalarni qamrab oldi. Teskari va nokorrekt qo‘yilgan masalalardan foydalanish asosan geofizika (elektrik qidiruv, logistika, seysmik, potentsial nazariyaning teskari masalalari va boshqalar), astronomiya, tibbiyot va fanning boshqa sohalari bilan bog‘liq.. Teskari masalalarni hal qilish, shuningdek, qo'shimchalar, nuqsonlar, manbalar (issiqlik, tebranish, stress, ifloslanish) va boshqalarning joylashishini, shakli va tuzilishini aniqlashga yordam beradi. Bunday keng qo'llanilishi bilan teskari va nokorrekt qo'yilgan masalalar nazariyasi o'zining paydo bo'lishidan boshlab zamonaviy fanning eng jadal rivojlanayotgan yo'nalishlaridan biriga aylangani ajablanarli emas.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Nokorrekt va teskari masalalar yo'nalishining asoschilaridan A.N.Tixonovning [1], M.M.Lavrent'evning [2] ishlarida (korrektlik, turg'unlik, regulyarizasiya oilasi, kvaziyechim, evolyutsion tenglamalar uchun Koshi masalasi) ma'lumotlar to‘liq yoritib berilgan. Nokorrekt qo'yilgan masalalarni sonli yechish nazariyasi A.N.Tixonov [3] regulyarizatsilash algoritmi tushunchasini shakllantirgandan keyingina hisoblash matematikasining mustaqil bo'limi sifatida shakllandi.

Giperbolik tenglamalar uchun teskari koeffitsientli masalalar nazariyasini ishlab chiqishda I.M.Gelfand va B.M.Levitanlarning ishlari matematik asos bo‘lib xizmat qildi. Giperbolik tenglamalar uchun teskari masalalarda bir qancha nazariy natijalar olingan va ularni yechishning turli usullari ishlab chiqilgan. S.I.Kabanixin [4] giperbolik tenglamalar koeffitsientlarini aniqlash uchun proyeksiya-farq usullarini taklif qildi. S.I.Kabanixinning [5] monografiyasida taqsimlangan dastlabki ma’lumotlar bilan to‘g‘ri va teskari masalalarni o‘rganish natijalari, giperbolik tipdagi tenglama uchun yig‘ma manbali masala berilgan. Giperbolik tipdagi tenglama uchun teskari masalaning umumiy yechilishi isbotlangan.

NATIJA VA MUHOKAMA

Teskari masalalarni yechishning chekli ayrimalar sxemasini teskarilash usuli

Teskari masalalarni o‘rganish shuni ko‘rsatdiki, ularning ikkita turi mavjud bo‘lib (retrospektiv va chegara) chiziqli, ikkinchisi (koeffitsiyent va geometrik) sezilarli darajada chiziqli emas. Masalalarning nochiziqliligi tufayli ularni yechish ancha murakkab bo‘lib, buning uchun chekli ayirmalar usulini qo‘llash maqsadga muvofiqdir.

Ushbu usulning asosiy g’oyasi chekli ayrimalar operatori yordamida differensial operatorni yaqinlashtirish va bosqichma-bosqich tugun qiymatlarini topishdir. Har xil turdagi operatorlar uchun chekli ayirmalar sxemasini teskarilash usuli hozirda yetarlicha batafsil ishlab chiqilgan, ammo u quyidagi xususiyatga ega: chekli ayirmalar operatorining o‘lchami oshgani sayin, yechim topish jarayoni turg’un bo‘lmay qoladi, bu teskari masalani nokkorektligini keltirib chiqaradi. Nokkorrekt qo‘yilgan masalaning oldingi tahlili (xususan, raqamli farqlash protseduralari) chekli ayirmalar sxemasining qadami kiritilgan ma’lumotlarning xatosiga mos kelishi kerakligini ko'rsatadi. Keling, ushbu yondashuvning asosiy bosqichlarini misol sifatida quyidagi masaladan foydalanib ko‘rib chiqaylik:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+q(x)v,\ (x,t)\in\Delta_1(T),$$
$$v\big|_{x=0}=g(t),\ \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ t\in(0,T). \quad (1)$$

Ushbu (1) masala “yetarlicha kichik sohada”, shuningdek, har qanday $T\in R_+$ uchun ham korrekt. Faraz qilaylik $q\in C^4\left[0,T\right]$ (bundan keyin shunday q deb hisoblaymiz g silliqlikni saqlagan holda bir tekisda R_- ga davom ettirilishi mumkin). Buni $\Delta_1(T)=\left\{(z,t)\in R^2 : t\in(0,T), z\in(-T+t,T-t)\right\}$ da $q\in C^4\overline{(\Delta_1(T))}$ uchun ko‘rsatish oson, Ixtiyoriy natural N son va $h=T/N$ qadamni olamiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz : $v_i^k=v(ih,kh)$, $q_i=q_i(hi), g^k=g(hk).$

Keyin (1) masalani differensiallash operatorlarini chekli ayrimalar analoglar bo‘yicha yaqinlashtirib, diskret formulada yozish mumkin:

$$h^{-2}\left(v_i^{k+1}-2v_i^k+v_i^{k-1}\right)=h^{-2}\left(v_i^k-2v_i^k+v_{i-1}^k\right)+q_i v_i^k+O\left(h^2\right), \qquad (2)$$

$$v_i^0=q_i, \qquad (3)$$

$$v_0^k=g^k, \qquad (4)$$

$$v_1^k=\frac{1}{2}\left(g^{k+1}+g^{k-1}\right)+O\left(h^2\right). \qquad (5)$$

(2) dan olamiz

$$v_{i+1}^k=v_i^{k+1}+v_i^{k-1}-v_{i-1}^k-h^2q_iv_i^k+h^2O(h^2) \qquad (6)$$

Tengliklar zanjirini (6) ga almashtiramiz.

$$v_i^{k+1}=v_{i-1}^{k+2}+v_{i-1}^k-v_{i-2}^{k+1}-h^2q_{i-1}v_{i-1}^{k+1}+h^2O\left(h^2\right),$$

$$v_{i-1}^{k+2}=v_{i-2}^{k+3}+v_{i-2}^{k+1}-v_{i-3}^{k+2}-h^2q_{i-2}v_{i-2}^{k+2}+h^2O\left(h^2\right)$$

va hokazo, natijada, ba’zi o‘zgarishlardan keyin biz quyidagi formulani olamiz

$$v_{i+1}^k=v_i^{k-1}+\frac{1}{2}\left(g^{k+i+1}-g^{k-i-1}\right)-h^2\sum_{j=1}^{i}q_jv_j^{k+i-j}-\frac{1}{2}h^2q_0g^{k+i}+O\left(h^3\right). \qquad (7)$$

O‘z navbatida, v_i^{k-1} qiymat (7) va hokazo formuladan foydalangan holda oldingi qatlamlardagi qiymatlar orqali ifodalanishi mumkin. (7) ketma-ket almashtirishni qo’llash orqali biz nihoyat quyidagi tasvirni olamiz:

$$v_{i+1}^k=\frac{1}{2}\left(g^{k+i+1}+g^{k-i-1}\right)-\frac{1}{2}h^2\sum_{j=0}^{i}q_0g^{k+i-2j}-h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s}q_jv_j^{k-i-j+2s}+O\left(h^2\right). \qquad (8)$$

(8) tenglik quyidagi Dalamber formulasining diskret analogidir [6]:

$$v(x,t)=\frac{1}{2}[g(t+x)+g(t-x)]-\frac{1}{2}\int_0^x\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}q(\xi)v(\xi,\tau)d\tau d\xi \qquad (9)$$

(8) formula teskari masalani tahlil qilish imkonini beradi. (8) da *k=0* deylik, *q* ning R_- dagi juft davomidan foydalanib quyidagi formulaga ega bo’lamiz:

$$q_{i+1}=g^{i+1}-\frac{1}{2}h^2\sum_{j=0}^{i}q_0g^{i-2j}-h^2\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{s}q_jv_j^{2s-i-j}+O\left(h^2\right). \qquad (10)$$

Shunday qilib *q* funksiya uchun operator tenglamasining ayirmali analogiga ega bo‘lamiz:

$$q(t)=g(t)-\int_0^x\int_0^{x-\xi}q(\xi)v(\xi,\tau)d\tau d\xi \qquad (11)$$

Aytaylik $T\in R_+$ uchun $\Delta_2(T)$ to‘plam quyidagicha aniqlansin: $\Delta_2(T)=\{(x,t):x\in(0,T),t\in(x-T,T-x)\}$.

$\Delta_2^h(T)$ ni $(ih,kh)\in\Delta_2(T)$ bo‘ladigan butun sonlarning (*i, k*) juftliklari sifatida to‘plamni aniqlaylik. (2) - (5) yaqinlashishlar asosida teskari masalani chekli ayirmasini tuzamiz:

$$u_{i+1}^k=u_i^{k+1}+u_i^{k-1}-u_{i-1}^k-h^2p_iu_i^k,$$

$$i=\overline{2,N};\ (i,k)\in\Delta_2^h(T)$$

$$u_i^0=p_i,\quad i=\overline{0,N};$$

$$u_1^k=\frac{1}{2}\left(g^{k+1}+g^{k-1}\right),\ k=\overline{-N+1,N-1},$$

bu yerda $i=\overline{N_1,N_2}$ ifoda *i* ning N_1 dan N_2 gacha bo‘lgan barcha butun qiymatlarni qabul qilishni bildiradi.

(11) - (13) ayirmali teskari masala yechimi munosabatlarini qanoatlantiradigan $\left(p_i,u_i^k\right),(i,k)\in\Delta_2^h(T)$ juft to‘r funksiyalaridir.

Quyidagi teorema o‘rinli:

1-teorema

(11)-(13) ayirmali teskari masala har qanday $T \in R_+$ va har qanday $N > 2$ uchun yagona yechimga ega.

Chekli ayirmani yaqinlashtirishga asoslangan yondashuvga asoslanib, kerakli funksiyaning barcha tugun qiymatlarini aniqlash mumkin.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности //Матем. сб. 1935. Т.42. №2. С. 199-211.
2. Лаврентьев М.М. Условно – корректные задачи для дифференциальных уравнение. Новосибирск. НГУ 1973.
3. Тихонов А.Н. Математическая геофизика. - М.: ОИФЗ РАН, 1999.- 476 с.
4. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициента гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988.- 168 с.
5. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
6. Ватульян А. О. Математические модели и обратные задачи // Соросовский Образовательный Журнал. 1998. № 11. – С. 143–148.