O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR

1995-yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2024/3-SON

ILOVA TO‘PLAM

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

MUNDARIJA

Aniq va tabiiy fanlar

MATEMATIKA

FIZIKA-TEXNIKA

FarDU. Ilmiy xabarlar – Scientific journal of the Fergana State University

Volume 30 Issue 3, 2024-yil DOI: 10.56292/SJFSU/vol30_iss3_2t/a331

UO'K: 512.13

TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASHDA EHTIMOLLAR NAZARIYASI ELEMENTLARIDAN FOYDALANISH METODIKASI

МЕТОДИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАВЕНСТВ

METHODS OF USING ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY IN PROVING INEQUALITIES

Jo'raboyev Saidaxbor Solijonovich[1]
[1]Farg'ona davlat universiteti, f.m. f.b.f. d., (PhD)

Abdumutalova Madina Xoshimjon qizi[2]
[2]Farg'ona davlat universiteti, talabasi

Annotatsiya

Maqolada ba'zi turdagi tengsizliklarni ehtimollar nazariyasi elementlari yordamida isbotlash usuli keltirib o'tilgan. Ma'lumki, tengsizliklar ko'plab matematik xulosalarni baholash va asoslashda ishlatiluvchi qurol vazifasini bajaradi. Ularni isbotlash usullari esa tadqiqotchi uchun alohida yangi bilim berish bilan birgalikda ko'plab matematik sohalarni integrallashuviga olib keladi. Shu bilan birgalikda har qanday tengsizlikni isbotlash tadqiqotchilardan alohida bilim va metodika talab qiladi. Bu esa bir xil turdagi tengsizliklarni isbotlashning eng samarali usullarini ishab chiqish zaruratini tug'diradi. Shu maqsadda ma'lum ko'rinishdagi tengsizliklar uchun ehtimollar nazariyasi elementlaridan foydalanib isbotlash metodikasi ishlab chiqildi. Ushbu metodika tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuniga va dispersiyasini nomanfiy qiymatlarni qabul qilishiga asoslanadi. Dispersiyaning ushbu xossasidan foydalanib tengsizliklar uchun ma'lum munosabat keltirilgan va to'g'riligi isbotlangan. Ushbu munosabat yordamida berilgan tengsizliklar boshqa usullardan ko'ra qulayroq isbotlanishi bir nechta amaliy masalalarni hal qilish orqali asoslandi. Ushbu tasdiqni umumiy holdagi ko'rinishi yordamida ba'zi murakkab ko'rinishdagi tengsizliklarni ham isbotlash mumkin. Bu esa ehtimollar nazariyasiga oid bilimlar matematikaning boshqa sohalarida ham muhim rol o'ynashini anglatadi.

Аннотация

В статье дан метод доказательства некоторых видов неравенств с использованием элементов теории вероятностей. Известно, что неравенства являются инструментом, используемым при оценке и обосновании многих математических выводов. Методы их доказательства приводят к интеграции многих математических областей и дают исследователю новые знания. В то же время доказательство любого неравенства требует от исследователей специальных знаний и методологии. Это вызывает необходимость производиться наиболее эффективных способов доказательства некоторых типичных неравенств. Для этой цели был разработан метод доказательства с использованием элементов теории вероятностей для неравенств определенного вида. Эта методология основана на законе распределения случайных величин и принятии неотрицательных значений дисперсии. Используя это свойство дисперсии, приводятся и доказываются некоторые соотношения для неравенств. То, что неравенства, даваемые этим соотношением, доказать легче, чем другими методами, было доказано решением ряда практических задач. В общей форме это утверждение можно использовать для доказательства некоторых сложных неравенств. Это означает, что знание теории вероятностей играет важную роль и в других областях математики.

Abstract

The article gives a method for proving certain types of inequalities using elements of probability theory. It is known that inequalities are a tool used in evaluating and justifying many mathematical conclusions. The methods of their proof lead to the integration of many mathematical fields and provide the researcher with new knowledge. At the same time, proving any inequality requires researchers to have special knowledge and methodology. This makes it necessary to develop the most effective ways to prove some typical inequalities. For this purpose, a proof method was developed using elements of probability theory for inequalities of a certain type. This methodology is based on the law of distribution of random variables and the adoption of non-negative variance values. Using this property of dispersion, some relations for inequalities are given and proven. The fact that the inequalities given by this relation are easier to prove than other methods has been proven by solving a number of practical problems. In general form, this statement can be used to prove some complex inequalities. This means that knowledge of probability theory plays an important role in other areas of mathematics.

Kalit so'zlar: *Tengsizliklar, matematik kutilma, dispersiya.*
Ключевые слова: *Неравенства, математическое ожидание, дисперсия.*
Key words: *Inequalities, mathematical expectation, dispersion*

KIRISH

Ma'lumki, elementar yoki murakkab ko'rinishdagi tengsizliklarni isbotlash o'quvchiga bu boradagi bilimlarini puxta o'rganish bilan birgalikda matematikaning boshqa sohalariga oid bilimlarini integrallashuviga olib keladi. Ushbu fikrni matematikaga oid ko'plab Respublika va Xalqaro darajadagi musobaqalarda berilgan masalalarni kamida bittasi tengsizliklarni isbotlashga oid ekanligi bilan ham izohlash mumkin. Shu sababdan tengsizliklarni isbotlashga bag'ishlangan ilmiy izlanishlar hozirgi kunda ham matematik olimlar tomonidan yuqori baholanib kelinmoqda.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

2000-yilda Longyan universiteti matematika va kompyuter fanlari bo'limi olimlari Fuxua Vey va Shan - Xe Vu tomonidan: "Cheklovli kasr tengsizligining bir nechta isbotlari va umumlashtirishlari" maqolasini nashr ettirildi. Ushbu maqolada 1995-yil Torontoda (Kanada) bo'lib o'tgan 36-IMO ning 2-muammosi uchun o'n xil isbotni keltirilgan, [1]. 5-isbotda mualliflar tasodifiy o'zgaruvchiga asoslangan usuldan foydalanadilar. Keyinroq, ya'ni 2017-yilda Daniel Sitaru va Claudia Nanuti tomonidan ushbu metodika bir nechta tengsizliklarga tadbiq qilinadi, [2]. Ammo ushbu ishlarni barchasida tadqiqotchilar bir nechta amaliy masalalar bilan cheklanganlar. 2012-yilda Zdarvko Cvetkovski o'zining "Tengsizliklar" nomli asarida deyarli barcha turdagi tengsizliklarni isbotlash texnikasi va ularning tadbiqlarini keltirib o'tadi, [3].

NATIJA VA MUHOKAMA

Dastlab, Daniel Sitaru va Claudia Nanuti tomonidan taklif etilgan isbotlash texnikasini ba'zi tengsizliklarga tadbiq qilib ko'ramiz.

Aytaylik, ξ–tasodifiy miqdor, $M\xi$ esa uning matematik kutilmasi bo'lsin. Tasodifiy miqdor qiymatlarini matematik kutilmadan chetlanishining kvadratini matematik kutilmasi ξ tasodifiy miqdorning ***<u>dispersiyasi</u>*** deyiladi va $D\xi$ ko'rinishida belgilanadi, ya'ni

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Ma'lumki, $D\xi \ge 0$ yoki $M\xi^2 \ge M(\xi)^2$ munosabatlar har doim o'rinli [4].

1-misol. Agar x, y, z musbat sonlar bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$4\sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} \le \sqrt{9(4xy + 3yz + 2xz)}.$$

Isbot. ξ tasodifiy miqdorni quyidagicha kiritamiz:

$$\xi = \begin{cases} \sqrt{xy}; & p_1 = \frac{4}{9}, \\ \sqrt{yz}; & p_2 = \frac{3}{9}, \\ \sqrt{xz}; & p_3 = \frac{2}{9}. \end{cases}$$

ξ ning matematik kutilmasi va dispersiyasini aniqlaymiz:

$$M(\xi) = \frac{4}{9}\sqrt{xy} + \frac{3}{9}\sqrt{yz} + \frac{2}{9}\sqrt{xz},$$

$$M(\xi^2) = \frac{4}{9}xy + \frac{3}{9}yz + \frac{2}{9}xz,$$

$$M(\xi)^2 \le M(\xi^2),$$

$$\left(\frac{4}{9}\sqrt{xy} + \frac{3}{9}\sqrt{yz} + \frac{2}{9}\sqrt{xz}\right)^2 \le \frac{4}{9}xy + \frac{3}{9}yz + \frac{2}{9}xz,$$

$$\left(4\sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz}\right)^2 \le \frac{81(4xy + 3yz + 2xz)}{9},$$

$$4\sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} \le \sqrt{9(4xy + 3yz + 2xz)}.$$

Berilgan tengsizlik isbotlandi.

2-misol. a va b musbat sonlar uchun, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\le(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\sqrt{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\,.$$

Isbot. ξ tasodifiy miqdorni quyidagicha kiritamiz:

$$\xi=\begin{cases}\sqrt[3]{a};\ p_1=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}},\\ \sqrt[3]{b};\ p_2=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.\end{cases}$$

ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini aniqlaymiz:

$$M(\xi)=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\,,\qquad M(\xi^2)=\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\,,$$

$$M(\xi)^2\le M(\xi^2)\,,$$

$$\left[\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\right]^2\le\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\qquad\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\le\sqrt{\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}}\,,$$

$$\left\langle\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right\rangle,$$

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\le(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\sqrt{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\,.$$

Berilgan tengsizlik isbotlandi.

Ushbu masalalardan ko‘rishimiz mumkinki, taklif etilgan metodika berilgan tengsizliklarga mos tasodifiy miqdorni qurish va uning dispersiyasini hisoblashga asoslanadi.Ushbu muloxaza va dispersiyaning yuqorida keltirib o‘tilgan xossasidan foydalanib quyidagi tasdiqni isbotlaymiz.

1-tasdiq. Ixtiyoriy $\alpha,\beta,\gamma,A,B,C$ musbat sonlar uchun

$$\alpha\sqrt{A}+\beta\sqrt{B}+\gamma\sqrt{C}\le\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha A+\beta B+\gamma C)}\qquad(1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Ushbu munosabatni isbotlash uchun ξ tasodifiy miqdorni quyidagicha aniqlaymiz.

$$\xi=\begin{cases}\sqrt{A};\quad p_1=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},\\ \sqrt{B};\quad p_2=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma},\\ \sqrt{C};\quad p_3=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.\end{cases}$$

Bundan foydalanib, ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasini hisoblaymiz:

$$M(\xi)=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha\sqrt{A}+\beta\sqrt{B}+\gamma\sqrt{C})\,,$$

$$M(\xi^2)=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha A+\beta B+\gamma C)\,,$$

$$D(\xi)=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha A+\beta B+\gamma C)-\left[\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}(\alpha\sqrt{A}+\beta\sqrt{B}+\gamma\sqrt{C})\right]^2.$$

Dispersiyani ko‘rinishi va $M\xi^2\geq M(\xi)^2$ munosabatdan (1) tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

3-misol. Quyidagi ifodaning eng katta qiymatini toping: $(a+b+c=36)$

$$y=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+3}+\sqrt{2c+5}.$$

Yechish. ξ tasodifiy miqdorni quydagicha kiritamiz:

$$\xi=\begin{cases}\sqrt{2a+1}; & p_1=\frac{1}{3},\\ \sqrt{2b+3}; & p_2=\frac{1}{3},\\ \sqrt{2c+5}; & p_3=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Ushbu tasodifiy miqdor uchun $A=\sqrt{2a+1}, B=\sqrt{2b+3}, C=\sqrt{2c+5}$ $\alpha=\beta=\gamma=1$ bo‘lishidan va (1) dan

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+3}+\sqrt{2c+5}\leq 9\sqrt{3}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Yuqoridagi tengsizlik shuni ko‘rsatadiki, berilgan ifodaning eng katta qiymati $9\sqrt{3}$ ga teng.

4-misol. $x+y+z=1$ ni qanoatlantiruvchi $x,y,z>0$ sonlar uchun

$$\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$$

tengsizlikni isbotlang.

Isbot. ξ tasodifiy miqdorni quyidagi ko‘rinishda kiritamiz:

$$\xi=\begin{cases}\sqrt{6x+1}; & p_1=\frac{1}{3},\\ \sqrt{6y+1}; & p_2=\frac{1}{3},\\ \sqrt{6z+1}; & p_3=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Ushbu tasodifiy miqdor uchun $A=\sqrt{6x+1}$, $B=\sqrt{6y+1}$, $C=\sqrt{6z+1}$, $\alpha=\beta=\gamma=1$ bo‘lishidan va (1) dan

$$\sqrt{6x+1}+\sqrt{6y+1}+\sqrt{6z+1}\leq 3\sqrt{3}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

XULOSA

Xulosa o‘rnida isbotlangan tasdiqni umumiy ko‘rinishini isbotsiz keltiramiz:

Berilgan $\alpha_i, A_i>0$ $(i=\overline{1,n})$ shartni qanoatlantiruvchi sonlar uchun

$$\alpha_1\sqrt{A_1}+\alpha_2\sqrt{A_2}+....+\alpha_n\sqrt{A_n}\leq\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2+....+\alpha_n)(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+....+\alpha_nA_n)}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Shan - He Wu, Mihaly Bencze, Selected problems and theorems of analytic inequalities. Studis Publishing House, Ia¸si, Romania, 2012.

2. Zdravko Cvetkovski *Inequalities*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

3. Daniel Sitaru and Claudia Nanuti, *A "probablistic" method for proving incqualities*, Crux Mathematicorum, Vol.43(7), September 2017.

4. Sh.Q. Farmonov va boshqalar, *Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika*, T.: «Cho ‘lpon» NMIU, «Tafakkur-Bo ‘stoni», 2012.-208 b

5. Jo‘raboyev S.S, Abdumutalova X.M., *Tengsizliklarni isbotlashda ehtimollar nazariyasi elementlaridan foydalanish usullari*, «Amaliy matematika, matematik modellashtirish va informatikaning dolzarb muammolari» Respublika ilmiy konferentsiyasi ma’ruzalar to‘plami. – Nukus «NUR-TURAN PRINT» nashriyoti, 2024, 498 bet.