

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

— 2-2020 —

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Ш.Норов	
Ўзбекистонда ёшларга оид давлат сиёсати қонунчилигининг тарихий шаклланиши.....	79
К.Тошов	
Иккинчи жаҳон уруши йилларида сурхон воҳаси меҳнаткашларининг фронт ортидаги фаолияти	84
Г.Эгамбердиева	
Ўзбекистонда туризм соҳасини ислоҳ қилиш босқичлари (XX асрнинг иккинчи ярми – XXI асрнинг биринчи чораги)	89
И.Ғуломов	
1926 йили Ўзбекистон ССР аҳолисини рўйхатга олиш тадбирининг яқунлари айрим рақамларда	94

АДАБИЁТШУНОСЛИК

О.Туйчиева	
«Жавоҳир ул-ажойиб» аёлларга аталган илк тазкира сифатида	99
З.Яхшиева	
Тетралогияда тарихий ҳақиқат ва пафоснинг уйғунлиги.....	103
Ф.Икромхонова	
АҚШ адабиётида тарихий асарнинг шаклланиши	107
О.Дадажонов	
Жадид драмасида таълим-тарбия масаласи ва қаҳрамон талқини	111

ТИЛШУНОСЛИК

С.Хашимова	
Хитой тилида редупликатив феълларнинг маъноси ва қўлланилиш хусусиятлари.....	114
О.Бегимов	
Жанубий Ўзбекистон орообъектларининг номланишида диний тушунча ва тасаввурларнинг мотивланиши.....	119
З.Акбарова	
Олам лисоний манзарасига доир қарашлар таҳлили	124
Г.Ҳакимова	
Инглиз ва ўзбек тилларидаги зоонимик компонентли фразеологик бирликларнинг семантик таҳлили ва уларнинг миллий-маданий хусусиятлари	129
У.Раҳмонов	
Инглиз тилида ҳақоратни ифодаловчи эмоционал сўзлар таҳлили.....	133
А.Уралов	
Морфемалар тизимида аффиксоидлар масаласи	138

ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ

Л.Аҳмедова	
Олий таълим жараёнида инглиз тилини ўқитишда ўйин методлари: назария ва амалиёт	143
С.Сидиков, Г.Сидикова, А.Қосимов	
Кичик ёшдаги мактаб ўқувчиларининг моторли хусусиятларини ривожлантиришда акцентланган дарсларининг самарадорлиги	150

ИЛМИЙ АХБОРОТ

Г.Тиллабаева	
Юкланган Бернулли тенгламаси учун интеграл шартли масала.....	155
О.Ахмаджонова	
Бессел-Клиффорд функцияларининг баъзи умумлашмалари ва уларнинг хоссалари	160
К.Ражапов, И.Хомидов	
Муаммоли геометрик масалаларни алгебраик тенгламалардан фойдаланиб ечиш	163

УДК: 51+518.0

БЕССЕЛ-КЛИФФОРД ФУНКЦИЯЛАРИНИНГ БАЪЗИ УМУМЛАШМАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ-КЛИФФОРДА И ИХ СВОЙСТВА

SOME GENERALIZATIONS OF BESSEL-CLIFFORD FUNCTIONS AND THEIR PROPERTIES

О.Ахмаджонова

Аннотация

Мақолада Бессел-Клиффорд функцияларининг баъзи умумлашмалари ва уларнинг хоссалари баён қилинган.

Аннотация

В статье описаны некоторые обобщения функций Бесселя-Клиффорда и их свойства.

Annotation

The article describes some generalizations of the Bessel-Clifford functions and their properties.

Таянч сўз ва иборалар: Бессел-Клиффорд функцияси, модифицирланган гипер-Бессел функцияси
Ключевые слова и выражения: функция Бесселя-Клиффорда, модифицированная функция гипер-Бесселя.

Keywords and expressions: Bessel-Clifford function, modified hyper-Bessel function.

Математиканинг турли хил бўлимлари ва тадбиқлари, статистика, ядро физикаси ва бошқа соҳаларга қарашли масалаларни ечишда маълум бўлган бир қатор махсус функцияларнинг умумлашмалари пайдо бўлди ва ўрганилди. Масалан, У.К. Клиффорд [1] I_ν Бессел функциялари ва Макдональд функциялари орқали биринчи ва иккинчи тур модифицирланган Бессел-Клиффорд функциялари, деб номланган $C_\nu(z) = z^{-\nu/2} I_\nu(2\sqrt{z})$ ва $K_\nu(z) = z^{-\nu/2} K_\nu(2\sqrt{z})$ функцияларини киритган. Кейинчалик бу функциялар дельта-функциянинг асимптотик ёйилмаси [2] ва Колумбнинг [3] тўлқин тенгламалари ечимларини тавсифлаш учун фойдаланилган. Бундан ташқари C_ν ва K_ν функциялар қаср ҳисобнинг махсус функциялари назариясида муҳим роль ўйнаган Райт функциясининг хусусий ҳоллари эканлиги аниқланган [4].

Бошқа томондан атом тўлқинларининг дифракцияси ва акс эттириш масалалари ечимларини ошқор кўришда топиш учун де Бройл ва И.С.Витте [5] ушбу

$$f_3(a, b, c; z) = [\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)]^{-1} {}_0F_3(a, b, c; z)$$

биринчи тур гиперфункцияларини киритган, бу ерда $\Gamma(a)$ - Эйлернинг гамма функцияси ва ${}_pF_q$ - умумлашган гипергеометрик функция [6].

Бессел-Клиффорд функцияси ушбу

$$C_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^r}{\nu! \Gamma(\nu + r + 1)} \quad (1)$$

қатор ёрдамида аниқланади ва Бесселнинг биринчи тур функцияси $J_\nu(z)$ орқали қуйидаги формула билан боғланган:

$$C_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1) (z/2)^{-\nu} J_\nu(z).$$

Математик адабиётларда Бессел-Клиффорд функциялари учун яна қуйидаги белгилашлар ишлатилади:

$$C_\nu(z) = \bar{J}_\nu(z) = j_\nu(z).$$

О.Ахмаджонова – ФарДУ, II курс магистранти.

1953 йилда Деларуа [7,229-

274] биринчи марта Бессел функцияларининг умумлашмаларини $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ мульти индекс ёрдамида киритди. Кейинчалик бу функциялар М. Ключанцев [8,47-62], О.И. Маричев [9], В.С. Адамчик [10697-700], И. Димовски ва В. Кирякова [11,29-32] ва бошқалар томонидан ривожлантирилди.

1-таъриф. Ушбу функция

$$J_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(z) = \frac{\left(\frac{z}{n+1}\right)^{\nu_1 + \dots + \nu_n}}{\Gamma(\nu_1 + 1) \dots \Gamma(\nu_n + 1)} {}_0F_n \left((\nu_k + 1)_1^n; -\left(\frac{z}{n+1}\right)^n \right) =$$

$$= \frac{\left(\frac{z}{n+1}\right)^{\nu_1 + \dots + \nu_n}}{\Gamma(\nu_1 + 1) \dots \Gamma(\nu_n + 1)} j_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(z)$$

$\nu_1, \dots, \nu_n$ индексли n -тартибли гипер-Бессел функцияси деб аталади, бу ерда

$$j_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(z) = {}_0F_n \left((\nu_k + 1)_1^n; -\left(\frac{z}{n+1}\right)^{n+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{n+1}\right)^{k(n+1)}}{(1+\nu_1)_k \dots (1+\nu_n)_k k!}.$$

Худди шундай,

$$I_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(z) = \frac{\left(\frac{z}{n+1}\right)^{\nu_1 + \dots + \nu_n}}{\Gamma(\nu_1 + 1) \dots \Gamma(\nu_n + 1)} i_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}$$

n -тартибли модифицирланган гипер-Бессел функцияси таърифланади, бу ерда

$$i_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(z) = {}_0F_n \left((\nu_k + 1)_1^n; \left(\frac{z}{n+1}\right)^{n+1} \right).$$

$n = 1$ бўлганда, ушбу

$$J_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1 \left(\nu+1; -(z/2)^2 \right),$$

$$I_{\nu}^{(1)}(z) = I_{\nu}(z) = \frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1 \left(\nu+1; (z/2)^2 \right)$$

Бессел функцияларига эга бўлгамиз.

Гипер-Бессел функциялари қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантиради:

$$j(0) = 1, \quad j'(0) = \dots = j^{(n-1)}(0) = 0, \quad (2)$$

$$i(0) = 1, \quad i'(0) = \dots = i^{(n-1)}(0) = 0.$$

Худди гипер-Бессел функциялари каби n -даражали Бессел-Клиффорд функцияларини ҳам киритиш мумкин:

$$\begin{aligned}
C_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda_1 + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 1)} {}_0F_n \left((\lambda_k + 1)_1^n; -z \right) \\
&= z^{-\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) z^{\frac{1}{n+1}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{\Gamma(\lambda_1 + k + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + k + 1) k!}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Биз мазкур ишда ушбу

$$C_{\nu, \mu}(z) = [\Gamma(\nu + 1) \Gamma(\mu + 1)]^{-1} {}_0F_2(\nu + 1, \mu + 1, -z)$$

икки индексли Бессел-Клиффорд функцияси хоссаларини ўрганамиз.

Бевосита ҳисоблаш орқали қуйидаги натижаларни келтириб чиқариш мумкин:

$$\frac{d}{dz} C_{\nu, \mu}(z) = -C_{\nu+1, \mu+1}(z).$$

Математик индукция методи ёрдамида ушбу

$$\frac{d^k}{dz^k} C_{\nu, \mu}(z) = (-1)^k C_{\nu+k, \mu+k}(z)$$

тенгликнинг тўғри эканлиги исботланди.

Худди юқоридаги каби ушбу

$$\begin{aligned}
\left(z \frac{d}{dz} + \nu \right) C_{\nu, \mu}(z) &= \nu C_{\nu-1, \mu}(z), \\
\left(z \frac{d}{dz} + \mu \right) C_{\nu, \mu}(z) &= \mu C_{\nu, \mu-1}(z)
\end{aligned}$$

тенгликларни бевосита ҳисоблаш ёрдамида келтириб чиқариш мумкин.

Юқоридаги тенгликлардан $W(z) = C_{\nu, \mu}(z)$ функция

$$z^2 W'''(z) + (3 + \nu + \mu) z W''(z) + (1 + \nu + \mu + \nu \mu) W'(z) + \nu \mu W = 0$$

тенгламани қаноатлантириши келиб чиқади.

Адабиётлар:

1. Clifford W.K. On Bessel functions// Mathematical Papers.-London: Oxford Univ. Press. 1882.
2. Hayek.N. Perez –Acosta F. Asymptotic expressions of the Dirac delta function in terms of the Bessel- Clifford functions// Pure Appl. Math Sci.1993
3. Abromowitz M. Coloumb wave functions expressed in terms of Bessel- Clifford functions//J.Math. Phys.1954.
4. Kiryakova V. The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions// Comput.Math. Appl. 2010.
5. Witte N.S. Exact solution for the reflection and diffraction of atomic de Broglie waves by the travelling evanescent laser wave// J.Phys. A:Math.Gen.1998.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. –М.: Наука, 1974.
7. Delerue, P. (1953). Sur le calcul symbolique `a n variables et fonctions hyperbess`eliennes (II) *Annales Soc. Sci. Bruxelles, ser. 1*, No 3.
8. Kljuchantzev, M. (1983). Singular differential operators with $(r - 1)$ parameters and Bessel functions with vector indices (in Russian) *Sibirskii Mat. Zhournal*. 24, No 3.
9. Marichev, O. I. (1978). *Method of Calculation of Integrals of Special Functions* (in Russian). Minsk Nauka i Technika.
10. Adamchik, V. S. (1986). On the solution of the hyper-Bessel differential equation (in Russian) *Diff. Uravnenia*. 22, No 4.
11. Dimovski, I. and Kiryakova, V. (1986). Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper-Bessel functions *C. R. Acad. Bulg. Sci*.39, No 10.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор)