ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

# FarDU.
# ILMIY
# XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2020

# НАУЧНЫЙ
# ВЕСТНИК.
# ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

## АДАБИЁТШУНОСЛИК



## ТИЛШУНОСЛИК



## ПЕДАГОГИКА, ПСИХОЛОГИЯ



## ИЛМИЙ АХБОРОТ

**УДК: 51+517.91**

## ЮКЛАНГАН БЕРНУЛЛИ ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

## ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

## AN INTEGRAL CONDITIONED PROBLEM FOR THE UPLOADED EQUATION OF BERNULLI

**Г.Тиллабаева**

***Аннотация***

*Мақолада юкланган Бернулли тенгламаси учун интеграл шартли масала ечимини топиш усули баён қилинган.*

***Аннотация***

*В данной статье описывается метод нахождения решения задачи с интегральным условием для уравнения Бернулли.*

***Annotation***

*In this article, explaining a method of solving the integral conditioned problem for the equation of Bernulli.*

***Таянч сўз ва иборалар:*** *оддий дифференциал тенглама, Бернулли тенгламаси, интеграл шартли масала.*

***Ключевые слова и выражения:*** *обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение Бернулли, интегральная задача.*

***Keywords and exspressions:*** *a simple differential equation, equation of Bernulli, an integral conditioned problem.*

Одатда дифференциал тенгламада номаълум функция ва унинг ҳосиласи билан бирга унинг бир ёки бир неча нуқтадаги қийматлари қатнашса, у юкланган дифференциал тенглама дейилади $[1]$. Биз бу мақолада юкланган Бернулли тенгламаси учун интеграл шартли масалани ўрганамиз.

Фараз қилайлик, $P(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,..., $Q_n(x)$ - $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ кесмада аниқланган ва узлуксиз функциялар, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, лар берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ бўлсин. У ҳолда, агар $y = y(x)$ номаълум функция бўлса, ушбу тенглик

$$y'(x) + P(x)y(x) = y^{2k}(x)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)Q_m(x), x \in (a,b) \quad (1)$$

юкланган Бернулли тенгламаси бўлади, бу ерда $k = const \in N$.

***Масала.*** (1) тенгламанинг $[a,b]$ кесмада аниқланган, узлуксиз ва

$$\alpha y^{1+2k}(a) + \beta\int_a^b y^{1+2k}(x)dx = k_1 \quad (2)$$

шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $\alpha$, $\beta$, $k_1$ берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\alpha\beta \geq 0$.

***Г.Тиллабаева** – ФарДУ, физика-математика факультети математика ўқитиш методикаси йўналиши талабаси.*

Бу масаладан $\beta=0$ да (1) тенглама учун бошланғич масала, $\alpha=0$ бўлганда эса биринчи тур интеграл шартли масала келиб чиқади.

***Ечиш.*** Масала ечимини топиш учун аввал (1) тенгламанинг умумий ечимини топиб оламиз. Бунинг учун $s(x)=y^{1+2k}(x)$, $y(x)=s^{1/(1+2k)}(x)$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда (1) тенгламадан

$$s'+(1+2k)P(x)s=(1+2k)\sum_{m=1}^{n}y^{1+2k}(x_m)Q_m(x) \tag{3}$$

тенглама келиб чиқади.

(3) тенгламанинг ечимини $s(x)=u(x)\cdot v(x)$ кўринишда излаймиз. Унда $s'(x)=u'v+uv'$ бўлиб, (3) дан

$$u'v+uv'+(1+2k)\cdot P(x)u\cdot v=(1+2k)\sum_{m=1}^{n}y^{1+2k}(x_m)Q_m(x)$$

тенглама келиб чиқади.

Бу ердан $u(x)$ ва $v(x)$ ларни топиш учун қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} v'+(1+2k)P(x)v=0, \\ u'v=(1+2k)\sum\limits_{m=1}^{n}y^{1+2k}(x_m)Q_m(x). \end{cases}$$

Бу системадан

$$\begin{cases} v(x)=e^{-(1+2k)\int\limits_a^x P(z)dz}\cdot v(a), \\ u(x)=\dfrac{1}{v(a)}\left[\int\limits_a^x(1+2k)\sum\limits_{m=1}^{n}y^{1+2k}(x_m)Q_m(t)\cdot e^{(1+2k)\int\limits_a^t P(z)dz}dt\right]+u(a) \end{cases}$$

келиб чиқади. Буларни $s(x)=u(x)\cdot v(x)$ тенгликка қўйиб, (3) тенгламанинг умумий ечими формуласига эга бўламиз:

$$s(x)=e^{-(1+2k)\int\limits_a^x P(z)dz}\left[(1+2k)\sum_{m=1}^{n}y^{1+2k}(x_m)\int\limits_a^x Q_m(t)e^{(1+2k)\int\limits_a^t P(z)dz}dt+s(a)\right].$$

Энди $s(x)=y^{1+2k}(x)$ белгилашга асосан $y(x)$ ни топадиган бўлсак, (1) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича топилади:

$$y(x)=\left\{e^{-(1+2k)\int_a^x P(z)dz}\left[(1+2k)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)\int_a^x Q_m(t)e^{(1+2k)\int_a^t P(z)dz}dt+y^{1+2k}(a)\right]\right\}^{\frac{1}{1+2k}}$$

(4)

Бу функцияни (2) шартга бўйсундириб, $y^{1+2k}(a)$ нинг коэффициентларини йиғамиз:

$$y^{1+2k}(a)\left[\alpha+\beta\int_a^b e^{-(1+2k)\int_a^\xi P(z)dz}d\xi\right]=$$

$$=k_1-\beta(1+2k)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)\int_a^b d\xi\int_a^\xi Q_m(t)e^{(1+2k)\int_\xi^t P(z)dz}dt\,.$$

$\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\alpha\beta\geq 0$ шартга асосан $y^{1+2k}(a)$ нинг коэффициенти нолга тенг эмас. Шунинг учун охирги тенгликдан $y^{1+2k}(a)$ бир қийматли топилади:

$$y^{1+2k}(a)=\frac{k_1-\beta(1+2k)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)\int_a^b d\xi\int_a^\xi Q_m(t)e^{(1+2k)\int_\xi^t P(z)dz}dt}{\alpha+\beta\int_a^b e^{-(1+2k)\int_a^\xi P(z)dz}d\xi}. \qquad (5)$$

(5) тенгликни (1) тенгламанинг умумий ечимига қўйиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$y^{1+2k}(x)=(1+2k)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)\int_a^x Q_m(t)e^{(1+2k)\int_x^t P(z)dz}dt+$$

$$+\frac{k_1-\beta(1+2k)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)\int_a^b d\xi\int_a^\xi Q_m(t)e^{(1+2k)\int_\xi^t P(z)dz}dt}{e^{(1+2k)\int_a^x P(z)dz}\left[\alpha+\beta\int_a^b e^{-(1+2k)\int_a^\xi P(z)dz}d\xi\right]}.$$

Бу тенгликдан $x=x_j$, $j=\overline{1,n}$ нуқталарда қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$y^{1+2k}(x_j)=(1+2k)\sum_{m=1}^{n} y^{1+2k}(x_m)\int_a^{x_j} Q_m(t)e^{(1+2k)\int_{x_j}^t P(z)dz}dt+$$

$$+\frac{k_1-\beta\left(1+2k\right)\sum\limits_{m=1}^{n}y^{1+2k}\left(x_m\right)\int\limits_a^b d\xi\int\limits_a^{\xi}Q_m\left(t\right)e^{\left(1+2k\right)\int\limits_{\xi}^{t}P(z)dz}dt}{e^{\left(1+2k\right)\int\limits_a^{x_j}P(z)dz}\left[\alpha+\beta\int\limits_a^b e^{-\left(1+2k\right)\int\limits_a^{\xi}P(z)dz}d\xi\right]},\ j=\overline{1,n}.$$

Бу тенгликларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y^{1+2k}\left(x_j\right)-\left(1+2k\right)\sum_{m=1}^{n}y^{1+2k}\left(x_m\right)\int\limits_a^{x_j}Q_m\left(t\right)e^{\left(1+2k\right)\int\limits_{x_j}^{t}P(z)dz}dt=$$

$$=\frac{k_1-\beta\left(1+2k\right)\sum\limits_{m=1}^{n}y^{1+2k}\left(x_m\right)\int\limits_a^b d\xi\int\limits_a^{\xi}Q_m\left(t\right)e^{\left(1+2k\right)\int\limits_{\xi}^{t}P(z)dz}dt}{e^{\left(1+2k\right)\int\limits_a^{x_j}P(z)dz}\left[\alpha+\beta\int\limits_a^b e^{-\left(1+2k\right)\int\limits_a^{\xi}P(z)dz}d\xi\right]},\quad j=\overline{1,n}. \quad (6)$$

Агар ушбу белгилашларни киритсак,

$$\left(1+2k\right)\int\limits_a^{x_j}Q_m\left(t\right)e^{\left(1+2k\right)\int\limits_{x_j}^{t}P(z)dz}dt=A_{jm},\ j,m=\overline{1,n},$$

$$\frac{k_1-\beta\left(1+2k\right)\sum\limits_{m=1}^{n}y^{1+2k}\left(x_m\right)\int\limits_a^b d\xi\int\limits_a^{\xi}Q_m\left(t\right)e^{\left(1+2k\right)\int\limits_{\xi}^{t}P(z)dz}dt}{e^{\left(1+2k\right)\int\limits_a^{x_j}P(z)dz}\left[\alpha+\beta\int\limits_a^b e^{-\left(1+2k\right)\int\limits_a^{\xi}P(z)dz}d\xi\right]}=B_j,\ j=\overline{1,n},$$

(6) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y^{1+2k}\left(x_j\right)-\sum_{m=1}^{n}y^{1+2k}\left(x_m\right)A_{jm}=B_j,\ j,m=\overline{1,n}. \quad (7)$$

(7) - $y^{1+2k}\left(x_j\right)$, $j=\overline{1,n}$ ларга нисбатан *n* номаълумли *n* та чизиқли тенгламалар системаси бўлиб, унинг асосий детерминанти қуйидагидан иборат:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1-A_{11},A_{12},A_{13},\ldots,A_{1n}\\ A_{21},1-A_{22},A_{23},\ldots,A_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{n1},A_{n2},A_{n3},\ldots,1-A_{nn}\end{vmatrix}$$

$\Delta_j$ билан $\Delta$ нинг $j$ устунини $B_j$ , $j=\overline{1,n}$ сонлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминантни белгилайлик. У ҳолда, агар

1) $\Delta \neq 0$ бўлса, (7) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади.

2) $\Delta = 0$ , $\Delta_j = 0$ , $j=\overline{1,n}$ бўлса, (7) тенгламалар системаси чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

3) $\Delta = 0$ , $\Delta_s \neq 0$ , $s \in N$ , $1 \leq s \leq n$ бўлса, (7), тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди.

Юқорида баён қилинганлардан қуйидаги теорема келиб чиқади:

***Теорема.*** Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, $\{(1),(2)\}$ масала ягона ечимга, агар $\Delta = 0$ , $\Delta_j = 0$ , $j=\overline{1,n}$ бўлса, чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

Теорема шартлари бажарилганда (7) тенгламалар системасидан топилган $y^{1+2k}\left(x_j\right)$, $j=\overline{1,n}$ ларни (4) тенгликка қўйиб, $\{(1),(2)\}$ масала ечимини топамиз.

**Адабиётлар:**

1. Бойқузиев Қ.Б. Дифференциал тенгламалар. – Т.: Ўқитувчи, 1983.
2. Курош А.К. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968.

*(Тақризчи: А.Ўринов – физика метематика фанлари доктори, профессор)*