ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2020

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

ТАРИХ

МАТЕМАТИКА

УДК:**517.956.223**

ЯРИМЧЕКСИЗ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДДА УЧТА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА БЎЛГАН ЭЛЛИПТИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN A SEMI-INFINITE PARALLELEPIPED FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH THREE SINGULAR COEFFICIENTS

К.Каримов

Аннотация

Яримчексиз параллелепипедда учта сингуляр коэффициентга эга бўлган эллиптик тенглама учун иккита чегаравий Дирихле типидаги масала ва Келдиш масалалари тадқиқ қилинган. Масалалар ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги спектрал анализ усули ёрдамида исботланган.

Аннотация

Для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде исследованы две краевые задачи типа задачи Дирихле и задачи Келдыша. Единственность и существование решения задач доказаны с использованием метода спектрального анализа.

Annotation

For a three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped, two boundary value problems such as the Dirichlet problem and the Keldysh problem are studied. The uniqueness and existence of problem solving is proved by using the spectral analysis method.

Таянч сўз ва иборалар: *Дирихле масаласи, Келдиш масаласи, сингуляр коэффициент, спектрал усул.*

Ключевые слава и выражения: *задача Дирихле, задача Келдыша, сингулярный коэффициент, спектральный метод.*

Key words and word expressions: *Dirichlet problem, Keldysh problem, singular coefficient, spectral method.*

1. Введение. Постановка задачи.

Рассмотрим следующее трехмерное эллиптическое уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0 \qquad (1)$$

в полубесконечном параллелепипеде $\Omega = \{(x,y,z) : x \in (0,a), y \in (0,+\infty), z \in (0,c)\}$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma, a, c \in R$, причем $a > 0, c > 0;\ u = u(x,y,z) -$ неизвестная функция.

В зависимости от значений параметров α, β, γ для уравнения (1) в области Ω можно сформулировать различные краевые задачи.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma < 1/2$. Тогда однозначно решается

Задача D^{∞} Найти функцию $u(x,y,z) \in C([0,a] \times [0,\infty) \times [0,c]) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$u(0,y,z) = 0,\ 0 \le y < \infty,\ 0 \le z \le c; \qquad (2)$$

$$u(a,y,z) = 0,\ 0 \le y < \infty,\ 0 \le z \le c; \qquad (3)$$

$$u(x,0,z) = f(x,z),\ 0 \le x \le a,\ 0 \le z \le c; \qquad (4)$$

К.Каримов *– ФерГУ, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений.*

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y,z)=0,\ 0\le x\le a,\ 0\le z\le c; \tag{5}$$

$$u(x,y,0)=0,\ 0\le x\le a,\ 0\le y<\infty; \tag{6}$$

$$u(x,y,c)=0,\ 0\le x\le a,\ 0\le y<\infty, \tag{7}$$

где $f(x,y,z)-$заданная непрерывная функция.

Пусть теперь, $\alpha,\beta,\gamma\ge 1/2$. Тогда однозначно решается

Задача E^{∞} . Найти ограниченную при $x\to 0$ и $z\to 0$ функцию $u(x,y,z)\in C((0,a]\times[0,\infty)\times(0,c])\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям (3), (4), (5) и (7).

Отметим, что некоторые краевые и нелокальные задачи в двумерных областях, т.е. в полуполосе для уравнения с сингулярными коэффициентами были предметом многочисленных исследований [см. например 1,2,3]. Краевая задача в бесконечном параллелепипеде для уравнения с вырождением порядка рассмотрено в [4], а в работах [5,6,7] для уравнения (1), в области $\Omega\cap(y<b), b=const>0$, исследованы различные краевые задачи.

В данной работе докажем существование и единственность решения сформулированных выше задач D^{∞} и E^{∞}.

2. Построения собственных функций

Сначала исследуем задачи D^{∞} . Для нахождения решения задач D^{∞} применим метод Фурье [8]. Найдем нетривиальные решения задачи {(1), (2), (3), (6), (7)}. С этой целью, разделив переменные по формуле $u(x,y,z)=W(x,z)Q(y)$, из уравнения (1) получим

$$Q''(y)+\frac{2\beta}{y}Q'(y)-\lambda Q(y)=0,\ 0<y<\infty, \tag{8}$$

$$W_{xx}+W_{zz}+\frac{2\alpha}{x}W_x+\frac{2\gamma}{z}W_z+\lambda W=0,\ 0<x<a,\ 0<z<c, \tag{9}$$

где $\lambda\in R-$константа разделения.

Учитывая однородные краевые условия (2), (3), (6) и (7), для уравнения (9) получим следующую задачу на собственные значения в прямоугольнике $\overline{\Pi}=\{(x,z):0\le x\le a,\,0\le z\le c\}$:

Задача D_{xz}^{λ}**.** Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные в $\overline{\Pi}$ решения $W(x,y)\in C(\overline{\Pi})\cap C^2(\Pi)$ уравнения (9), удовлетворяющие условиям

$$W(0,z)=0,\ 0\le z\le c, \tag{10}$$

$$W(a,z)=0,\ 0\le z\le c, \tag{11}$$

$$W(x,0)=0,\ 0\le x\le a, \tag{12}$$

$$W(x,c)=0,\ 0\le x\le a\,. \tag{13}$$

Путем разделения переменных $W(x,z)=X(x)Z(z)$ задача D_{xz}^{λ} сводится к следующим задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений:

Задача D_x^λ: $L_\mu^\alpha X(x) \equiv X''(x) + \dfrac{2\alpha}{x} X'(x) + \mu X(x) = 0,\ X(0) = 0,\ X(a) = 0;$

Задача D_z^λ: $L_{\lambda-\mu}^\gamma Z(z) = 0$, $Z(0) = 0,\ \ Z(c) = 0$,
где μ – константа разделения.

Сначала найдем решение задачи D_x^λ. Рассмотрим уравнение $L_\mu^\alpha X(x) = 0$ и найдем его общее решение. Произведя замену $X(x) = \left(t/\sqrt{\mu}\right)^{1/2-\alpha} p(t)$, где $t = \sqrt{\mu}x$, $\mu > 0$ (при $\mu \le 0$, задача D_x^λ не имеет нетривиальных решений), из уравнения $L_\mu^\alpha X(x) = 0$ получим уравнение Бесселя [9]:

$$t^2 p''(t) + tp'(t) + \left[t^2 - (1/2-\alpha)^2\right] p(t) = 0. \tag{14}$$

Принимая во внимание вид общего решения [9] уравнения (14) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения $L_\mu^\alpha X(x) = 0$ в виде

$$X(x) = d_1 x^\nu J_{\pm\nu}\left(\sqrt{\mu}x\right) + d_2 x^\nu Y_{\pm\nu}\left(\sqrt{\mu}x\right), \tag{15}$$

где $\nu = 1/2 - \alpha$, d_1, d_2 -произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)$ - функция Бесселя порядка l первого и второго рода [9] соответственно.

Из (15) следует, что решение уравнения $L_\mu^\alpha X(x) = 0$, удовлетворяющее условию $X(0) = 0,$ существует только при $\nu > 0$ и оно определяется равенством

$$X(x) = d_1 x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right). \tag{16}$$

Подставляя (16) в условие $X(a) = 0$, получим условия существования нетривиального решения задачи D_x^λ:

$$J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\mu}a\right) = 0. \tag{17}$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [9]. Так как $1/2 - \alpha > 0$, то уравнение (18) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_n – n-ный положительный корень уравнения (17), получим значения параметра μ, при которых существуют нетривиальные решения задачи D_x^λ, т.е. ее собственные значения: $\mu = \mu_n = (\sigma_n / a)^2$, $n \in N$.

Полагая в (17) $\mu = \mu_n, n \in N$ и $d_1 = 1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи D_x^λ:

$$\tilde{X}_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x / a),\ n \in N. \tag{18}$$

Для удобства дальнейших вычислений систему функций (18) нормируем:

$$X_n(x) = \tilde{X}_n(x) \Big/ \left\|\tilde{X}_n\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)}, \tag{19}$$

где $\left\|\tilde{X}_n\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)} = \left(\int_0^a \rho(x) \tilde{X}_n^2(x)\,dx\right)^{1/2} = \left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)\right| / \sqrt{2},\ \rho(x) = x^{2\alpha}.$

Теперь перейдем к исследованию задачи D_z^λ. Методом, примененным при решении задачи D_x^λ, найдем общее решение уравнения $L_{\lambda-\mu}^\gamma Z(z)=0$ при $\mu=\mu_n$:

$$Z_n(z)=d_{3n}z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}\,z\right)+d_{4n}z^{1/2-\gamma}Y_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}\,z\right),\ n\in N, \qquad (20)$$

где d_{3n} и d_{4n} -произвольные постоянные.

Подставляя (20) в краевые условия $Z(0)=0$, $Z(c)=0$ имеем $d_{4n}=0$ и

$$J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}\,c\right)=0,\ n\in N. \qquad (21)$$

Учитывая, что $\gamma<1/2$ и обозначая через δ_{km} – m-ый положительный корень уравнения (21) при $n=k$, имеем те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи D_z^λ: $\lambda_{nm}=(\sigma_n/a)^2+(\delta_{nm}/c)^2$, $n,m\in N$.

Полагая в формуле (20) $\lambda=\lambda_{nm}$, $d_{3n}=1$, $d_{4n}=0$, $n,m\in N$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи D_z^λ в виде

$$\tilde{Z}_{nm}(z)=z^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\delta_{nm}z/c\right),\ n,m\in N. \qquad (22)$$

Для удобства систему функций (22) нормируем:

$$Z_{nm}(z)=\tilde{Z}_{nm}(z)\Big/\left\|\tilde{Z}_{nm}\right\|_{L_{2,q}(0,1)}, \qquad (23)$$

где $\left\|\tilde{Z}_{nm}\right\|_{L_{2,q}(0,1)}=\left(\int\limits_0^c q(z)\tilde{Z}_{nm}^2(z)dz\right)^{1/2}=\left|J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|/\sqrt{2},\ q(z)=z^{2\gamma}$.

Согласно работе [9], система собственных функций (19) и (23) полна в пространстве $L_2[0,1]$ соответственно с весом $x^{2\alpha}$ и $z^{2\gamma}$.

Полагая в уравнении (8) $\lambda=\lambda_{nm}$, найдем общее решение:

$$Q_{nm}(y)=a_{nm}y^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,y\right)+b_{nm}y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,y\right),\ 0\le y<\infty, \qquad (24)$$

здесь a_{nm}, b_{nm} –произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)$ –модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода [9].

Теперь найдем собственные функции задачи E^∞, т.е. найдем нетривиальные и ограниченные при $x\to 0$ и $z\to 0$ функции $u(x,y,z)\in C\left((0,a]\times[0,\infty)\times(0,c]\right)\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению (1) и однородным краевым условиям (3) и (7).

Для этого как и в задаче D^∞, разделив переменные по формуле $u(x,y,z)=X(x)Q(y)Z(z)$, имеем следующие задачи на собственные значения

Задача E_x^λ: $L_{\tilde{\mu}}^\alpha X(x)=0$, $|X(0)|<\infty$, $X(a)=0$;

Задача E_z^λ: $L_{\tilde{\lambda}-\tilde{\mu}}^\gamma Z(z)=0$, $|Z(0)|<\infty$, $Z(c)=0$,

где $\tilde{\mu},\tilde{\lambda}$ – константы разделения.

Общее решение уравнения $L_{\tilde{\mu}}^\alpha X(x)=0$, определяется формулой (15), но в качестве μ здесь берется $\tilde{\mu}$. Из общего решения (15) выбираем такое частное решение, чтобы выполнялось условие ограниченности в нуле. В силу $\alpha\ge 1/2$, из (15) следует, что ограниченное при $x\to 0$ решение определяется равенством

$$X\left(x\right)=d_1x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{\tilde{\mu}}x\right). \tag{25}$$

Подставляя (25) в условие $X\left(a\right)=0$, получим условия существования нетривиального решения задачи E_x^λ:

$$J_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{\mu}a\right)=0. \tag{26}$$

Так как $\alpha\geq 1/2$, то уравнение (26) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через $\tilde{\sigma}_n$ –n-ный положительный корень уравнения (26), получим значения параметра $\tilde{\mu}$, при которых существуют нетривиальные решения задачи E_x^λ, т.е. ее собственные значения: $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_n=\left(\tilde{\sigma}_n/a\right)^2,\ n\in N$.

Полагая в (25) $\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_n,\ n\in N$ и $d_1=1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи E_x^λ: $X_n\left(x\right)=x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\tilde{\sigma}_nx/a\right),\ n\in N.$

После нормировки этой системы функций, получим

$$X_n\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{\left|J_{1/2+\alpha}\left(\tilde{\sigma}_n\right)\right|}x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\tilde{\sigma}_nx/a\right),\ n\in N. \tag{27}$$

Аналогично, найдем решение задачи E_z^λ:

$$Z_{nm}\left(z\right)=\frac{\sqrt{2}}{\left|J_{1/2+\gamma}\left(\tilde{\delta}_{nm}\right)\right|}z^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}-\tilde{\mu}_n}\,z\right),\ n,m\in N, \tag{28}$$

где $\tilde{\lambda}_{nm}=\left(\tilde{\sigma}_n/a\right)^2+\left(\tilde{\delta}_{nm}/c\right)^2,\ n,m\in N$, а $\tilde{\delta}_{nm}$ - положительные корни уравнения $J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda-\tilde{\mu}_n}c\right)=0$.

Согласно работе [9], система собственных функций (27) и (28) также полна в пространстве $L_2\left[0,1\right]$ соответственно с весом $x^{2\alpha}$ и $z^{2\gamma}$.

Общее решение уравнения (8) при $\lambda=\tilde{\lambda}_{nm}$, определяется в виде

$$Q_{nm}\left(y\right)=A_{nm}y^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}y\right)+B_{nm}y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}y\right),\ 0\leq y<\infty, \tag{29}$$

где A_{nm}, B_{nm} – произвольные постоянные.

Следовательно, собственные функции задачи E^∞, т.е. нетривиальные и ограниченные при $x\to 0$ и $z\to 0$ решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3), (7), имеют вид

$$u_{nm}\left(x,y,z\right)=\frac{2x^{1/2-\alpha}z^{1/2-\gamma}}{\left|J_{1/2+\alpha}\left(\tilde{\sigma}_n\right)J_{1/2+\gamma}\left(\tilde{\delta}_{nm}\right)\right|}J_{\alpha-1/2}\left(\frac{\tilde{\sigma}_nx}{a}\right)J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\tilde{\delta}_{nm}z}{c}\right)\times$$
$$\times\left[A_{nm}y^{1/2-\beta}I_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}y\right)+B_{nm}y^{1/2-\beta}K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}y\right)\right],\ \left(x,y,z\right)\in\Omega. \tag{30}$$

3. Единственность решения

Доказательство единственности решения поставленных задач опирается на ниже доказуемые две леммы.

Лемма 1. а) Если $\alpha<1/2$, а функция $u(x,y,z)\in C([0,a]\times[0,\infty)\times[0,c])\cap C^2(\Omega)$- есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0,y,z)=0$, то $\left|\lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha}u_x(x,y,z)\right|<+\infty$; b) Если $\gamma<1/2$, а функция $u(x,y,z)\in C([0,a]\times[0,\infty)\times[0,c])\cap C^2(\Omega)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x,y,0)=0$, то $\left|\lim\limits_{z\to 0}z^{2\gamma}u_z(x,y,z)\right|<+\infty$.

Доказательство. Разделив переменные по формуле $u(x,y,z)=X(x)Q(y)Z(z)$, из уравнения (1) по переменным x и z получим обыкновенные дифференциальные уравнения $L_{\mu}^{\alpha}X(x)=0$ и $L_{\lambda-\mu}^{\gamma}Z(z)=0$. Пользуясь общими решениями этих уравнений, нетрудно убедиться, что решения уравнений $L_{\mu}^{\alpha}X(x)=0$ и $L_{\lambda-\mu}^{\gamma}Z(z)=0$, удовлетворяющие соответственно условиям $X(0)=0$ и $Z(0)=0$ при $\alpha,\gamma<1/2$, имеют вид (19) и (23). Вычисляя производную первого порядка функции (19) и (23) по формуле [9,56]

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\pm\nu}J_{\nu}(x)\right]=\pm x^{\pm\nu}J_{\nu\mp 1}(x), \tag{31}$$

соответственно имеем

$$X_n'(x)=\sqrt{2}\sigma_n x^{1/2-\alpha}J_{-1/2-\alpha}(\sigma_n x/a)\Big/\left[a\left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)\right|\right],$$
$$Z_{nm}'(z)=\sqrt{2}\delta_{nm}z^{1/2-\gamma}J_{-1/2-\gamma}(\delta_{nm}z/c)\Big/\left[c\left|J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|\right].$$

Отсюда следует, что $\left|\lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha}X_n'(x)\right|<\infty$, $\left|\lim\limits_{z\to 0}z^{2\gamma}Z_{nm}'(x)\right|<\infty$. Если учесть эти неравенства и непрерывность функций $X(x)$, $Q(y)$ и $Z(z)$ в своих областях определения, то из $u(x,y,z)=X(x)Q(y)Z(z)$ легко следует, что $\left|\lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha}u_x(x,y,z)\right|<+\infty$ и $\left|\lim\limits_{z\to 0}z^{2\gamma}u_z(x,y,z)\right|<+\infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *а) Если $\alpha\ge 1/2$, а функция $u(x,y,z)\in C((0,a]\times[0,\infty)\times[0,c])\cap C^2(\Omega)-$ ограниченное при $x\to 0$ решение уравнения (1), то $\lim\limits_{x\to 0}u_x(x,y,z)=0$; b) Если $\gamma\ge 1/2$, а функция $u(x,y,z)\in C([0,a]\times[0,\infty)\times(0,c])\cap C^2(\Omega)-$ ограниченное при $z\to 0$ решение уравнения (1), то $\lim\limits_{z\to 0}u_z(x,y,z)=0$.*

Доказательство. Так как $\alpha,\gamma\ge 1/2$, то ограниченные в нуле решения уравнений $L_{\mu}^{\alpha}X(x)=0$ и $L_{\lambda-\mu}^{\gamma}Z(z)=0$, соответственно имеют вид (27) и (28). Вычисляя производную первого порядка этих функций по формуле (31), имеем

$$X_n'(x)=-\sqrt{2}\tilde{\sigma}_n x^{1/2-\alpha}J_{1/2+\alpha}(\tilde{\sigma}_n x/a)\Big/\left[a\left|J_{1/2+\alpha}(\tilde{\sigma}_n)\right|\right],$$
$$Z_{nm}'(z)=-\sqrt{2}\tilde{\delta}_{nm}z^{1/2-\gamma}J_{1/2+\gamma}(\tilde{\delta}_{nm}z/c)\Big/\left[c\left|J_{1/2+\gamma}(\tilde{\delta}_{nm})\right|\right],$$

Отсюда следует, что $\lim_{x\to 0} X_n'(x)=0$ и $\lim_{z\to 0} Z_{nm}'(x)=0$, в силу чего из $u(x,y,z)=X(x)Q(y)Z(z)$ следует, что $\lim_{x\to 0} u_x(x,y,z)=0$ и $\lim_{z\to 0} u_z(x,y,z)=0$. Лемма 2 доказана.

Теперь переходим к доказательству единственности решения задач D^∞ и E^∞. Пусть $u(x,y,z)-$ решение задачи D^∞ и E^∞. Следуя работе [10], рассмотрим следующие функции:

$$\omega_{nm}(y)=\int_0^c\int_0^a u(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dxdz,\ m,n\in N, \tag{32}$$

На основании (32) введем функции

$$\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)=\int_{\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{a-\varepsilon_2} u(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dxdz,\ m,n\in N, \tag{33}$$

где ε_1 и ε_2 - достаточно малое положительное число.

Очевидно, что $\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)=\omega_{nm}(y)$.

Дифференцируем равенство (34) по y при $0<y<\infty$:

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'=\int_{\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{a-\varepsilon_2} u_y(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dxdz,\ n,m\in N;$$

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]''=\int_{\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{a-\varepsilon_2} u_{yy}(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dxdz,\ n,m\in N.$$

Учитывая уравнение (1), из последних равенств имеем

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]''=-\int_{\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{a-\varepsilon_2}\left(u_{xx}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{y}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z\right)\times$$
$$\times x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dxdz=$$
$$=-\left[\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}\left(\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}u_{xx}x^{2\alpha}X_n(x)dx+\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n(x)dx\right)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz+\right.$$
$$\left.+\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\left(\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}u_{zz}z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz+\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}\frac{2\gamma}{z}u_z z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz\right)x^{2\alpha}X_n(x)dx+\frac{2\beta}{y}\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'\right]. \tag{34}$$

Преобразуем следующие интегралы:

$$\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}u_{xx}x^{2\alpha}X_n(x)dx=\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}x^{2\alpha}X_n(x)d_x(u_x)=u_x x^{2\alpha}X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}u_x\left[x^{2\alpha}X_n(x)\right]'dx=$$
$$=u_x x^{2\alpha}X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-u\left[x^{2\alpha}X_n(x)\right]'\Big|_{x=\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}u\left[x^{2\alpha}X_n(x)\right]''dx=$$
$$=u_x x^{2\alpha}X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-2\alpha x^{2\alpha-1}uX_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-x^{2\alpha}uX_n'(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}+$$

$$+\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}\left[X_n''(x)+2\frac{2\alpha}{x}X_n'(x)+\left(4\alpha^2-2\alpha\right)x^{-2}X_n(x)\right]dx,$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n(x)dx=\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}2\alpha x^{2\alpha-1}X_n(x)d_x u=2\alpha x^{2\alpha-1}X_n(x)u\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-$$

$$-\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}\left[\frac{2\alpha}{x}X_n'(x)+\left(4\alpha^2-2\alpha\right)x^{-2}X_n(x)\right]dx.$$

На основании полученных выше равенств имеем

$$\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}u_{xx}x^{2\alpha}X_n(x)dx+\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n(x)dx=$$

$$=\left[u_x X_n(x)-uX_n'(x)\right]x^{2\alpha}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-\mu_n\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}ux^{2\alpha}X_n(x)dx\,. \tag{35}$$

Аналогично находим

$$\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}u_{zz}z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz+\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}\frac{2\gamma}{z}u_z z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz=$$

$$=\left\{\left[u_z Z_{nm}(z)-uZ_{nm}'(z)\right]z^{2\gamma}\right\}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=c-\varepsilon_2}-(\delta_{nm}/c)^2\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}uz^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz. \tag{36}$$

Подставляя (35) и (36) в равенство (34), получим

$$\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]''=-\left[\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}\left(\left[u_x X_n(x)-uX_n'(x)\right]x^{2\alpha}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=a-\varepsilon_1}-\right.\right.$$

$$-\mu_n\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}ux^{2\alpha}X_n(x)dx\Big)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz+\int_{\varepsilon_1}^{a-\varepsilon_1}\left(\left[u_z Z_{nm}(z)-uZ_{nm}'(z)\right]z^{2\gamma}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=c-\varepsilon_2}-\right.$$

$$\left.\left.-(\delta_{nm}/c)^2\int_{\varepsilon_2}^{c-\varepsilon_2}uz^{2\gamma}Z_{nm}(z)dz\right)x^{2\alpha}X_n(x)dx+\frac{2\beta}{|y|}\left[\omega_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'\right].$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon_1\to 0,\quad \varepsilon_2\to 0$ и принимая во внимание утверждения лемм 1 и 2, соответствующие рассматриваемой задаче, и краевых условий задач D_x^λ, D_z^λ, E_x^λ, E_z^λ и (3), (7), а затем, требуя $\left|u_x(a,y,z)\right|<\infty$, $\left|u_z(x,y,c)\right|<\infty$, получим, что $\omega_{nm}(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\omega_{nm}''(y)+\frac{2\beta}{y}\omega_{nm}'(y)-\lambda_{nm}\omega_{nm}(y)=0,\ 0<y<\infty,$$

т.е. уравнению (8). Следовательно $\omega_{nm}(y)=Q_{nm}(y)$.

Теперь, учитывая условия (4) и (5), из (32) находим

$$\lim_{y\to\infty}\omega_{nm}(y)=0\,, \tag{37}$$

$$\omega_{nm}(0)=\int_0^c\int_0^a f(x,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_{nm}(z)dxdz=f_{nm}\,. \tag{38}$$

Если рассмотрим задачу D^{∞}, то из (24) на основании асимптотических поведений функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ при больших z [11,172-173]:

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}}, \quad K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}, \tag{39}$$

следует, что решение уравнения (8), удовлетворяющее условию (37), определяется равенством

$$Q_{nm}(y) = b_{nm} y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, y\right). \tag{40}$$

Учитывая $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$ и подставляя (40) в условие (38), получим

$$Q_{nm}(0) = b_{nm} 2^{-1/2-\beta} \Gamma(1/2-\beta)\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{\beta-1/2} = f_{nm},$$

откуда однозначно находится b_{nm}:

$$b_{nm} = \frac{2^{1/2+\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{1/2-\beta}}{\Gamma(1/2-\beta)} f_{nm}. \tag{41}$$

Принимая во внимание равенства (40), (41) и $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$, окончательно находим

$$\omega_{nm}(y) = \frac{2^{1/2+\beta} K_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, y\right)}{\left(y\sqrt{\lambda_{nm}}\right)^{\beta-1/2}\Gamma(1/2-\beta)} f_{nm} = \bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\, y\right) f_{nm}, \tag{42}$$

где $\bar{K}_\nu(z) = 2^{1-\nu} z^\nu K_\nu(z)/\Gamma(\nu),\ \bar{K}_\nu(0) = 1\ (\nu > 0)$ [12].

Если рассмотрим задачу E^{∞}, то из формулы (29) аналогично находим

$$\omega_{nm}(y) = \bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}\, y\right) f_{nm}. \tag{43}$$

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если существует решение задачи D^{∞} и E^{∞}, то оно единственно.

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что однородная задача, соответствующая задаче D^{∞} и E^{∞}, имеет только тривиальное решение. Пусть $f(x,z) \equiv 0$, тогда $f_{nm} = 0$ при всех $n, m \in N$. В силу этого равенства, из (42), (43) и (32) вытекает, что

$$\int_0^c \int_0^a u(x,y,z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z)\, dx dz = 0,\ m, n \in N.$$

Отсюда, в силу полноту (для каждого $n \in N$) системы функций (23) и (28) в пространстве $L_2[0,1]$ с весом $z^{2\gamma}$, следует, что

$$\int_0^1 u(x,y,z) x^{2\alpha} X_n(x)\, dx = 0,\ n \in N.$$

Если учесть полноты системы функций (19) и (27) в пространстве $L_2[0,1]$ с весом $x^{2\alpha}$, из последнего равенства вытекает, что $u(x,y,z) \equiv 0$ для всех $x \in [0,1]$ и при любом $y \in [0,\infty),\ z \in [0,1]$. Теорема 1 доказана.

4. Построение и обоснование решения задачи

Метод построения и обоснования решения поставленных задач D^{∞} и E^{∞} одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением задачи D^{∞}.

Решение задачи D^{∞} ищем в виде суммы ряда Фурье-Бесселя:

$$u(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2x^{1/2-\alpha}z^{1/2-\gamma}}{\left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|}J_{1/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right)J_{1/2-\gamma}\left(\frac{\delta_{nm}z}{c}\right)\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,y\right)f_{nm}, \quad (44)$$

где f_{nm} определяется формулой (38).

Каждый член этого ряда удовлетворяет всем условиям задачи D^{∞}. Отметим, что при $\beta<1/2$ знаменатель коэффициентов ряда (45) не имеет нули. Если докажем, что ряд (44) и ряды $\left(u_{xx}+(2\alpha/x)u_x\right)$, $\left(u_{yy}+(2\beta/y)u_y\right)$, $\left(u_{zz}+(2\gamma/z)u_z\right)$, полученные из него дифференцированием, сходятся равномерно в области их рассмотрения, то его сумма будет решением задачи D^{∞}. При этом нам понадобятся ниже доказуемые четыре леммы.

Лемма 3. Для каждого фиксированного n и $\forall y\in[0,+\infty)$ при достаточно больших m справедливы оценки

$$\left|\omega_{nm}(y)\right|\le\left|f_{nm}\right|, \quad (45)$$

$$\left|y^{-2\beta}\left[y^{2\beta}\omega'_{nm}(y)\right]'\right|\le C_1\lambda_{nm}\left|f_{nm}\right|, \quad (46)$$

где C_1 – положительная постоянная.

Доказательство. Непосредственное вычисление дает, что

$$y^{-2\beta}\left[y^{2\beta}\omega'_{1nm}(y)\right]'=\lambda_{nm}\omega_{nm}(y). \quad (47)$$

Очевидно, что для любых значений λ_{nm} и $y\ge 0$, справедливо неравенство

$$\left|\bar{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}\,y\right)\right|\le 1. \quad (48)$$

Если учесть неравенство (48), то из (42) и (47) сразу следуют оценки (45) и (46). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для всех $x\in[0,a]$ при достаточно больших n справедливы следующие оценки:

$$\left|X_n(x)\right|\le C_2, \quad (49)$$

$$\left|x^{-2\alpha}\left[x^{2\alpha}X'_n(x)\right]'\right|\le C_3\left(\sigma_n/a\right)^2, \quad (50)$$

где C_2, C_3 – некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Очевидно, что $X_n(x)\in C[0,1]$ и для достаточно больших ξ справедлива асимптотическая формула [11]

$$J_\nu(\xi)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\cos\left(\xi-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому справедлива оценка (49).

Используя формулу (31), из (19) и (20) найдем

$$x^{2\alpha}X'_n(x)=\sqrt{2}\sigma_n x^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}\left(\sigma_n x/a\right)\Big/\left[a\left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)\right|\right]. \quad (51)$$

Вычислим производную первого порядка функций (51) по формуле (31). Затем, умножая её на $x^{-2\alpha}$, имеем

$$x^{-2\alpha}\left[x^{2\alpha}X_n'(x)\right]' = -\sqrt{2}\sigma_n^2 x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x/a)\Big/\left[a^2\left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)\right|\right] = -(\sigma_n/a)^2 X_n(x).$$

Отсюда сразу следует справедливость оценки (50).

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 5. Для всех $z \in [0,1]$ и $n \in N$ при достаточно больших m справедливы следующие оценки:

$$\left|Z_{nm}(z)\right| \le C_4, \tag{52}$$

$$\left|z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}Z_{nm}'(z)\right]'\right| \le C_5\delta_{nm}^2, \tag{53}$$

где C_4, C_5 − некоторые положительные постоянные.

Лемма 6. Пусть выполнены следующие условия:

$$f(a,z) = f(0,z) = f(x,c) = f(x,0) = 0, \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha}z^{2\gamma}f_{xz}(x,z)\right] \in C\left([0,a]\times[0,b]\right), \tag{55}$$

$$f_0(0,z) = f_0(a,z) = f_0(x,0) = f_0(x,c) = 0, \tag{56}$$

где $f_0(x,z) = x^{-2\alpha}z^{-2\gamma}\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left[x^{2\alpha}z^{2\gamma}f_{xz}(x,z)\right]$.

Тогда для больших n и m справедлива оценка

$$\left|f_{nm}\right| \le \frac{C_6}{\sigma_n^3\delta_{nm}^3}, \tag{57}$$

где C_6 – положительная постоянная.

Доказательство. На основании формулы (30) коэффициенты f_{nm}, которые задаются формулой (38), представимы в виде

$$f_{nm} = \frac{2ac}{\sigma_n\delta_{nm}\left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|}\times$$

$$\times\int_0^c\int_0^a f(x,z)\frac{d}{dx}\left[x^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right)\right]\frac{d}{dz}\left[z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\frac{\delta_{nm}z}{c}\right)\right]dxdz.$$

Применяя правило интегрирования по частям три раза и учитывая условия (54)-(56), из последнего получим

$$f_{nm} = \frac{2(ac)^3}{\sigma_n^3\delta_{nm}^3\left|J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)J_{3/2-\gamma}(\delta_{nm})\right|}\times$$

$$\times\int_0^c\int_0^a f_{0xz}(x,z)x^{1/2+\alpha}J_{-1/2-\alpha}\left(\frac{\sigma_n x}{a}\right)z^{1/2+\gamma}J_{-1/2-\gamma}\left(\frac{\delta_{nm}z}{c}\right)dxdz. \tag{58}$$

Отсюда для $\forall n \in N$ при достаточно больших m следует оценка (57). Лемма 6 доказана.

Теперь переходим к исследованию сходимости рядов. Из (44) почленным дифференцированием формально составим ряды:

$$u_{xx}+\frac{2\alpha}{x}u_x=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x^{-2\alpha}\left[x^{2\alpha}X_n'(x)\right]'\omega_{nm}(y)Z_{nm}(z),\tag{59}$$

$$u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}X_n(x)y^{-2\beta}\left[y^{2\beta}\omega_{nm}'(y)\right]'Z_{nm}(z),\tag{60}$$

$$u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}X_n(x)\omega_{nm}(y)z^{-2\gamma}\left[z^{2\gamma}Z_{nm}'(z)\right]'.\tag{61}$$

В силу оценок (45), (49) и (52), ряд (44) при любом $(x,y,z)\in[0,a]\times[0,\infty)\times[0,c]$ мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_7\left|f_{nm}\right|,\tag{62}$$

а ряды (59)-(61) при любом (x,y,z) на каждом компакте $K\subset\Omega$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_8\sigma_n^2\left|f_{nm}\right|,\tag{63}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_9\lambda_{nm}\left|f_{nm}\right|,\tag{64}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{10}\delta_{nm}^2\left|f_{nm}\right|,\tag{65}$$

где $C_j,\ j=\overline{7,10}-$ некоторые положительные постоянные.

Согласно лемме 6, ряды из (62)-(65) оцениваются соответственно числовыми рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{11}}{\sigma_n^3\delta_{nm}^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{12}}{\sigma_n\delta_{nm}^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm}C_{13}}{\sigma_n^3\delta_{nm}^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{14}}{\sigma_n^3\delta_{nm}},\tag{66}$$

где $C_j,\ j=\overline{11,14}-$некоторые положительные постоянные.

Нетрудно убедиться, что ряды (66) сходятся, следовательно, сходятся и ряды (63), (64), (65), тогда, согласно признаку Вейерштрасса, равномерно сходится ряд (44) в $[0,a]\times[0,\infty)\times[0,c]$, а ряды (63)-(65) на каждом компакте $K\subset\Omega$. Поэтому функция $u(x,y,z)$, определенная рядом (44), удовлетворяет всем условиям задачи D^{∞}.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть функция $f(x,z)$ удовлетворяет условиям (54)-(56). Тогда решение задачи D^{∞} существует, единственно и определяется формулой (44).

Аналогичным методом доказывается следующая

Теорема 3. Пусть функция $f(x,z)$ удовлетворяет условиям (54)-(56). Тогда решение задачи E^{∞} существует, единственно и определяется формулой

$$u(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2x^{1/2-\alpha}z^{1/2-\gamma}}{\left|J_{1/2+\alpha}(\tilde{\sigma}_n)J_{1/2+\gamma}(\tilde{\delta}_{nm})\right|}J_{\alpha-1/2}\left(\frac{\tilde{\sigma}_n x}{a}\right)J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\tilde{\delta}_{nm}z}{c}\right)\overline{K}_{1/2-\beta}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}\,y\right)\tilde{f}_{nm},$$

где

$$\tilde{f}_{nm} = \frac{2ac}{\left|J_{1/2+\alpha}\left(\tilde{\sigma}_n\right)J_{1/2+\gamma}\left(\tilde{\delta}_{nm}\right)\right|} \times \times \int_0^c \int_0^a f\left(x,z\right) x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}\left(\frac{\tilde{\sigma}_n x}{a}\right) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}\left(\frac{\tilde{\delta}_{nm} z}{c}\right) dxdz\,.$$

Замечание. Можно сформулировать и исследовать задачи, близкие к задачам D^{∞} и E^{∞}, и в том случае, когда параметры α, β, γ удовлетворяют одному из следующих условий: $\{\beta \geq 1/2, \alpha, \gamma < 1/2\}$, $\{\gamma \geq 1/2, \alpha, \beta < 1/2\}$, $\{\alpha, \beta \geq 1/2, \gamma < 1/2\}$, $\{\alpha, \gamma \geq 1/2, \beta < 1/2\}$, $\{\beta, \gamma \geq 1/2, \alpha < 1/2\}$.

Литература:

1. Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи// Диф.ур., 2001. Т. 37, №11.
2. Лернер М.Е., Репин О.А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщённого осесимметричного уравнения Гельмгольца// Диф. ур., 2001. Т. 37, №11.
3. Абашкин А.А. Об одной весовой краевой задаче в бесконечной полуполосе для двуосесимметрического уравнения Гельмгольца//Известия вузов. Математика. 2013. № 6.
4. Хачев М.М. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями вырождения в бесконечной призматической области//Вестник СамГосТех университета. 2002, №16.
5. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами//Итоги науки и техники. Тематические обзоры. −2018, −Т. 156.
6. Уринов А.К., Каримов К.Т. Об однозначной разрешимости краевых задач для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами//Известия вузов. Математика. −2019. −№ 2.
7. Каримов К.Т. Краевая задача для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве//Узбекский математический журнал. −2017. №4.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. -М.: Наука. 1972.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т.1. −М.: Изд. ИЛ. 1949.
10. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами//Вестник СамГосТех университета. −2017. −Т.21, №4.
11. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. −М.: Физматлит. 1963.
12. Капилевич М.Б., Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа//Математический сборник, 1952, Т. 30(72), № 1.

(Рецензент: А.Уринов, доктор физико-математических наук, профессор).