ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

Ш.Каримов, З.Комилова
Сингуляр коэффициентли тўртинчи тартибли битта тенглама учун Гурса масаласи........ 6
К.Каримов
Яримчексиз параллелепипедда учта сингуляр коэффициентга эга бўлган эллиптик тенглама учун чегаравий масалалар 11

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

Р.Расулов, Б.Ахмедов, А.Абдухоликов, У.Раимжонова
Яримўтказгичларда ток ташувчилар эффектив Гамильтониани назарияси хусусида........ 24

КИМЁ

М.Хожиматов, Ф.Абдугаппаров, И.Асқаров, Қ.Отахонов
М-ферроценилбензой кислотаси билан амигдалин реакциясини ўрганиш 28

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

Э.Исаков, Ш.Турдиев
Болалар орасида бирламчи ногиронлик структурасининг таҳлили........ 33
Ф.Тухтасинов
Фарғона водийси жанубидаги сабзавот экинларининг агробиоценозлари орасида тарқалган бегона ўтлардаги бўртма ва бошқа тур паразит фитонематодаларнинг тарқалиши 37

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

Т.Абдуллаев
Инсон фаолиятининг ижтимоийлашуви 42
Г.Ғаффарова, Б.Қодиров
Ҳаракатлар стратегияси ва тизимли ёндашув 47
М.Каримова
Инсоният онги ва қалбига қаратилган глобал таҳдидлар 52
А.Музаффаров
Маданиятлараро мулоқот категорияси тадқиқига фалсафий-герменевтик ёндашув........ 56
А.Қамбаров, Д.Тошалиев
Бузрук мақомидан Сарахбори бузрук шуъбасининг таҳлили масаласига доир 60

ТАРИХ

Т.Эгамбердиева
1941-1945 йиллардаги Иккинчи жаҳон урушида ўзбек хотин-қизларининг маънавий жасорати........ 66
Ҳ.Холиқулова
Ўзбекистон ногиронлар нодавлат нотижорат ташкилотлари: истиқболлари ва уларни ривожлантириш йўллари........ 71
О.Ахмадов
Бухоро Халқ Совет Республикаси (БХСР)да таълим ва тарбияни замонавийлаштириш учун кураш 75

УДК: 51+517.91

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ БИТТА ТЕНГЛАМА УЧУН ГУРСА МАСАЛАСИ

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

GURSA TASKS FOR ONE EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH SINGULYAR COEFFICIENTS

Ш.Каримов, З.Комилова

Аннотация

Бу мақолада тўртинчи тартибли сингуляр коэффициентли хусусий ҳосилали тенглама учун Гурса масаласи ўрганилган. Масалани ечиш учун икки ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер оператори қўлланилган. Ечим ошкор кўринишда топилган.

Аннотация

В работе исследован аналог задачи Гурса для неклассического уравнения в частных производных четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами. Для решения задач применили двумерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера. Решение показано в явном виде.

Annotation

In the paper an analogue of the Gursat problem was investigated for a non classical fourth order partial equation with singular coefficients. To solve the problems, we applied the two-dimensional generalized Erdeyi-Kober operator. The solution is shown explicitly.

Таянч сўз ва иборалар: *умумлашган Эрдейи-Кобер оператори, Бессель функцияси, Бессель-Клиффорд функцияси.*

Ключевые слова и выражения: *обобщенный оператор Эрдейи-Кобера, функция Бесселя, функция Бесселя-Клиффорда*

Keywords and expressions: *Erdeyi-Kober operator, Bessel function, Bessel-Kliford function.*

1. Введение.

В настоящее время развитие современных технологий приводит к необходимости исследования качественно новых процессов, возникающих в науке и технике. В связи с этим возникает необходимость построения адекватных математических моделей и их дальнейшее изучение, которые приводят к неклассическим дифференциальным уравнениям. Например, математическая модель линейных волн в «незамагниченной» плазме описывается уравнением [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u - u\right) + \Delta u = 0,$$

где $\Delta \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ - многомерный оператор Лапласа, функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ представляет обобщенный потенциал электрического поля. В работе [1] исследована более общая математическая модель линейных волн в плазме

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta u - \lambda_1 u\right) + a\left(\Delta u - \lambda_2 u\right) = 0, \quad (1)$$

с различными начально-краевыми условиями, где $\lambda_1, \lambda_2, a \in R$.

К подобным уравнениям и системам уравнений приводят математические модели колебаний в молекуле ДНК [2], линеаризованная математическая модель Benney-Luke [3], математические модели Буссинеска-Лява [4] и другие.

В частности, к неклассическим

Ш.Каримов *– ФерГУ, доктор физико-математических наук.*
З.Комилова *– ФерГУ, преподаватель кафедры информационных технологий.*

дифференциальным уравнениям относятся модели, описываемые уравнениями смешанного типа, вырождающиеся уравнения и уравнения Соболевского типа. Уравнения Соболевского типа, иначе называемые уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной, после известной работы Соболева [5] являются объектом исследования для многих авторов.

В области теории уравнений Соболевского типа активно работают Р.Е.Шоуолтер, А.Фавини, А.Яги, Г.В.Демиденко, С.В.Успенский, Н.В.Сидоров, М.В.Фалалеев, М.О.Корпусов, И.В.Мельникова, С.Г.Пятков, А.И.Кожанов, Г.А.Свиридюк, Т.Г.Сукачева, В.Е.Федоров и другие. Обзор этих исследований можно найти в монографиях [6]-[7].

Данная работа посвящена исследованию вопросов разрешимости в классическом смысле аналога задачи Гурса для уравнения

$$L_{\alpha,\beta}^{\lambda_1,\lambda_2,\mu}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) - \lambda_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda_2^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \mu^2 u = 0, \qquad (2)$$

где

$$P_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{4\alpha\beta}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mu, \alpha, \beta \in R$, причем $0 < \alpha, \beta < 1/2$.

Это уравнение относится к классу уравнений с сингулярными коэффициентами, так как коэффициенты данного уравнения имеют сингулярную особенность на линиях $x = 0$ и $y = 0$. Кроме того, линии сингулярности одновременно являются двукратными характеристиками данного уравнения.

Параметры α и β входящие в уравнение (2), определяют порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0,\ \beta = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение типа (1), а при $\alpha = (n-1)/2,\ \beta = 0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ в сферической системе координат.

При $\lambda_1 = i\lambda,\ \lambda_2 = \lambda$ уравнение (2) можно представить в виде

$$L_{\alpha,\beta}^{i\lambda,\lambda,\mu}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) + \lambda^2 H_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) + cu = 0, \qquad (3)$$

а при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$L_{\alpha,\beta}^{i\lambda,\lambda,\mu}(u) \equiv P_{\alpha,\beta}(u) + \lambda^2 h_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) + cu = 0, \qquad (4)$$

где $c = \mu^2 - \lambda^4$

$H_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ - дифференциальный оператор обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$H_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u,$$

а $h_{\alpha,\beta}^{\lambda}$ - соответствующий ему дифференциальный оператор гиперболического типа

$$h_{\alpha,\beta}^{\lambda}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\beta}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u.$$

2. Постановка задачи.

Двумерные уравнения четвертого порядка рассматривались в работах М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, А.М.Нахушева, В.И.Жегалова, В.Ф.Волкодавова, А.И.Кожанова, А.П.Солдатова и их учеников. В работе Т.Д.Джураева и А.Сопуева [8] исследованы вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду общего линейного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

В данной работе в области $\Omega=\{(x,y):0<x<l,\ 0<y<h\}$ исследуется аналог задачи Гурса для уравнения (2).

Задача G. Требуется найти функцию $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \lim_{x\to 0} x^{2\alpha}u_x(x,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h; \tag{5}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ \lim_{y\to 0} y^{2\beta}u_y(x,y)=\psi_2(x),\ 0\le x\le l, \tag{6}$$

где $\varphi_k(y),\psi_k(x),(k=1,2)$ - заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(0)=0$.

Задача G при $\lambda_1=\lambda_2=0$ исследована в работе [9].

В силу линейности уравнения (2) сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача G₀. Требуется найти функцию $u(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (2) и краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=0,\ 0\le y\le h, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=0,\ 0\le x\le l, \tag{8}$$

где $\varphi_1(y),\ \psi_1(x)$ - заданные гладкие функции, причем $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$, $\varphi_1'(0)=0,\ \psi_1'(0)=0$.

Известные стандартные методы исследования уравнений высокого порядка, в случае уравнения с сингулярными коэффициентами, неэффективны. Например, в этом случае уже трудно построить решение с помощью метода функции Римана. Поэтому необходимо применение нестандартного математического аппарата, учитывающего специфику уравнений с сингулярными коэффициентами.

С этой целью рассмотрим вопрос о сведении данного уравнения, содержащего сингулярные коэффициенты, к эквивалентному уравнению без сингулярных коэффициентов.

Хорошо известно широкое использование дробных интегралов и производных в граничных условиях при исследовании нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов второго порядка. Например, при постановке и исследовании нелокальных краевых задач типа Бицадзе – Самарского и задач со смещением для вырождающихся уравнений гиперболического типа второго порядка краевые условия содержат операторов дробного интегрирования и дифференцирования.

В данной работе аппарат дробного интегродифференцирования используем для построения решения задачи G_0.

Для построения решения поставленной задачи применим многомерный оператор Эрдейи-Кобера.

3. Многомерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера

В работах [9], [10], [11] был введен многомерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера

$$J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}f(x)=J_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}\begin{pmatrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_n\\ p_1,\ldots,p_n\end{pmatrix}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+p_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\ldots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\overline{J}_{\alpha_k-1}\left(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t_k^2}\right)}{\left(x_k^2-t_k^2\right)^{1-\alpha_k}}t_k^{2p_k+1}\right]f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n, \quad (9)$$

исследованы его свойства и их приложение к многомерным уравнениям гиперболического [10] и параболического [12] типов с сингулярными коэффициентами, где $\alpha_k>0,\ p_k\geq -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $\overline{J}_\nu(z)-$функция Бесселя – Клиффорда [11], которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\overline{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$, $\Gamma(\nu)$- гамма функция [13].

Интеграл (6) является многомерным аналогом одномерного обобщенного оператора Эрдейи – Кобера с функцией Бесселя в ядре [14].

Для интеграла (6) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha_k>0, p_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $f(x)\in C^{2n}(\Omega_n)$, $x_k^{2p_k+1}B_{p_k}^{x_k}f(x)$ - интегрируемы в окрестности $x_k=0$ и $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2p_k+1}f_{x_k}(x)=0$, $k=\overline{1,n}$. Тогда имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^{n}(B_{p_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ p\end{pmatrix}\prod_{k=1}^{n}B_{p_k}^{x_k}f(x),$$

где $\Omega_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(0,a_k)$ - декартово произведение, $a_k>0,\ k=\overline{1,n}$, $B_{p_k}^{x_k}=\dfrac{\partial^2}{\partial x_ё^2}+\dfrac{2p_k+1}{x_k}\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ - оператор Бесселя по переменной x_k.

Теорема верна и при некоторых или всех $\lambda_k=0, k=\overline{1,m},\ m\leq n$.

4. Приложение многомерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера к решению задачи G.

Теорема 1 позволяет применить оператор (9) как оператор преобразования, позволяющий преобразовать уравнения высокого четного порядка с сингулярными коэффициентами в уравнения без сингулярных коэффициентов. Этот факт применим для исследования задачи G_0 для уравнения (4).

Предположим, что решение задачи G_0 существует. Это решение ищем в виде

$$u(x,y)=J_{\lambda_1,\lambda_2}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}U(x,y), \quad (10)$$

где $U(x,y)$ - неизвестная дифференцируемая функция.

Применяя многомерный обобщенный дробный оператор Эрдейи-Кобера [10], нами получена явная формула решения поставленной задачи в виде

$$u(x,y)=\psi_1(x)\overline{J}_{\beta-1/2}(\lambda y)+\varphi_1(y)\overline{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)-\varphi_1(0)\overline{J}_{\alpha-1/2}(\lambda x)\overline{J}_{\beta-1/2}(\lambda y)+$$
$$+\psi_2(x)\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\overline{J}_{\beta+1/2}(\lambda y)+\varphi_2(y)\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\overline{J}_{\alpha+1/2}(\lambda x),$$

где $\overline{J}_\nu(z)-$функция Бесселя – Клиффорда, которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$, по формуле $\overline{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$.

Литература:

1. Габов С.А. Математические основы линейной теории ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме. // Матем. моделирование, 1989, том 1, №12.
2. Cristiansen P.L., Muto V., Lomdahl P.S. On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom. // Nonlinearity. –1990, – № 4.
3. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude. // J. Math. Phys. – 1964. – № 43.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. –Москва: ОНТИ, 1935.
5. Соболев С.Л. Об одной краевой задаче математической физики. Изв. АН СССР, Сер. Матем. – 1954. – т. 18, №2.
6. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007.
7. Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. – Utrecht: VSP 1999.
8. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. – Т.: ФАН, 2000.
9. Каримов Ш.Т. Приложение многомерного оператора Эрдейи-Кобера к решению аналога задачи Гурса для уравнения четвёртого порядка с сингулярными коэффициентами. УзМЖ.2016. №4.
10. Каримов Ш.Т. Аналог задачи Коши для неоднородного многомерного поликалорического уравнения с оператором Бесселя // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН–Т. 156. − М., 2018.
11. Karimov Sh.T. Multimedinsional generalized Eldelyi-Kober operator and its application to solving Cauchy prodlems for differential equations with singular coefficients.// Fract. Calc. Appl. Anal., Vol.18, №4(2015),845-861.
12. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов.// Доклады АН РУз, 2013, №1.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, −Т.1.-М:Наука,1973.
14. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.

(Рецензент: А.Уринов, доктор физико-математических наук, профессор).