

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

4-2019

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

А.Э.Мадраҳимов Тартибланган статистикалар учун концентрация функциясининг баҳолари	5
В.Т.Samatov, U.B.Soyibboev, U.A.Mirzamahmudov Иккинчи тартибли дифференциал ўйинлар	12

КИМЁ

И.Р.Асқаров, А.С.Хожиқулов Йод танқислигини бартараф этишда ишлатиладиган дори воситалари ва уларнинг кимёвий таркиби.....	19
Ш.Ш.Турғунбоев, А.Х.Хаитбаев Бетулон кислотасини синтез қилиш	24
Д.Т.Хасанова, И.Р.Асқаров Пивони кимёвий таркиби асосида синфлаш ва сертификатлаш	29

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

В.Махмудов Маданийлаштириш шароитларида <i>Agropyron Cristatum</i> (L.) Beauv. нинг катта ҳаётий цикли.....	36
М.Холиқов, Ё.Ахмедова Қора калхат (<i>milvus migrans</i>)нинг Фарғона водийсида ҳаёт цикли ҳақида.....	43

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

М.Исағалиев, М.Обидов, Р.Матҳолиқов Доривор <i>sarparis spinos</i> нинг морфогенетик ва биогеокимёвий хусусиятлари	45
Н.Ж.Халилова Суғориладиган типик бўз тупроқларнинг морфогенетик хусусиятлари	49
А.Турдалиев, К.Асқаров, Н.Ходжиболаева Суғориладиган тупроқларда лантаноид ва радиоактив элементларнинг геоэнергетик хусусиятлари	52

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

Э.Мўйдинов, З.Таджибаев, А.Мирсодиқов, М.Мўйдинов Кластер: назария ва амалиёт	57
А.Мирсодиқов Худудларда хизмат кўрсатиш соҳаларига инвестицияларни жалб қилиш механизмларини такомиллаштиришнинг назарий асослари	62

ТАРИХ

Э.Раҳмонов Ўзбекистонда ижтимоий ҳимояга муҳтож аҳоли тоифаларини ҳимоялаш сиёсати: муаммолар ва илк натижалар (1991-2000 йй., Фарғона водийси мисолида).....	65
А.Азизов Фарғона водийси аҳолисининг уй ҳайвонлари билан боғлиқ тасаввурлари (қўй мисолида).....	69
Б. Усмонов Темурийлар даврида Фарғона боғдорчилиги	73
С.А. Хошимов Миллий сиёсий муҳолифатга қарши тазйиқ ва таъқиблар	76
Р.Х.Максудов Музей – халқ тарихининг кўзгуси	80
О.А. Кличев Бухоро амирлигида элчиларни кутиб олиш тартиби (xix асрнинг иккинчи ярми - xx аср бошлари).....	83
О.В.Маҳмудов Ўрта аср Испания таржима марказларида лотин тилига ўғирилган асарлар (I қисм: аниқ фанларга оид китоблар).....	87

УДК: 519.21

**ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК
ТАРТИБЛАНГАН СТАТИСТИКАЛАР УЧУН КОНЦЕНТРАЦИЯ ФУНКЦИЯСИНИНГ
БАҲОЛАРИ
ESTIMATION OF THE FUNCTION OF CONCENTRATION FOR AN ORDERED STATISTICS**

А.Э.Мадраҳимов

Аннотация

Мақолада тартибланган статистикалар ва танланма кўлами учун концентрация функциясини баҳолаш масаласи ўрганилган.

Аннотация

В статье изучен вопрос об оценке функции концентрации для порядковых статистик и размаха выборки.

Annotation

This article examines the issue of estimating the concentration function for ordinal statistics and sample size.

Таянч сўз ва иборалар: тартибланган статистикалар, танланма кўлами, концентрация функциясининг баҳоси.

Ключевые слова и выражения: порядковые статистики, размах выборки, оценки функции концентрации.

Keywords and expressions: order statistics, sample size, concentration function estimates.

Пусть u_1, u_2, \dots, u_n выборка объёма из равномерно $[0, 1]$ распределённых случайных величин и

$$u_{1,n} < u_{2,n} < \dots < u_{n,n} \quad (1)$$

соответствующий ей вариационный ряд.

Исследуем оценку функций концентрации случайных величин $u_{1,n}$, т.е.

$$Q(u_{1,n}; \lambda) = \sup_{x \geq 0} P\{x \leq u_{1,n} \leq x + \lambda\}$$

при любом $\lambda \geq 0$.

Известно [2], что

$$P(u_{1,n} < x) = \frac{n!}{(i-1)(n-i)!} \int_0^x u^{i-1} (1-u)^{n-1} du, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

а также

$$f_{i,n}(x) \frac{d}{dx} P(u_{i,n}, x) = \begin{cases} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{á äðóãèð ñëó÷àÿð} \end{cases} \quad (3)$$

Имеет место следующая.

Теорема 1. Пусть $2 \leq i \leq n-1$. Тогда для любого $\lambda \geq 0$

$$Q(u_{i,n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{\lambda n!}{(i-1)!(n-i)!} (i-1)^{i-1} (n-i)^{n-i} (n-1)^{-(n-1)} \right\}. \quad (4)$$

Доказательство. В силу (1) и (2) имеем

$$Q(u_{i,n}; \lambda) = \sup_{x \geq 0} \int_x^{x+\lambda} f_{i,n}(u) du = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!} \sup_{x \geq 0} \int_x^{x+\lambda} u^{i-1} (1-u)^{n-i} du. \quad (5)$$

исследуем поведение под интегральной функции в соотношении (5).

Положим

А.Э.Мадраҳимов – ФерГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

$$\varphi_{i,n}(u) = u^{i-1}(1-u)^{n-i}, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

нетрудно убедиться в том, что при $2 \leq i \leq n-1$ функция $\varphi_{i,n}(u)$ в точке $u = u_0 = \frac{i-1}{n-1}$ имеет максимум.

С учетом последнего получаем следующее неравенство

$$\begin{aligned} Q(u_{i,n}; \lambda) &\leq \min \left\{ 1, \frac{n!}{(i-n)!(n-i)!} \varphi_{i,n} \left(\frac{i-1}{n-1} \right) \sup_{x \leq 0} \int_x^{x+\lambda} du \right\} = \\ &= \min \left\{ 1, \frac{\lambda n!}{(i-1)!(n-i)!} (i-1)^{i-1} (n-i)^{n-i} (n-1)^{-(n-1)} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Замечание 1. Корректность теоремы 1 определяется поведением

$$\pi(n, i, \lambda) = \frac{\lambda n!}{(i-1)!(n-i)!} (i-1)^{i-1} (n-i)^{n-i} (n-1)^{-(n-1)}.$$

при различных значениях n, i, λ .

Изучим асимптотическое поведение этого выражения:

а) Пусть i - фиксировано. По формуле Стирлинга

$$n! \sim n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}.$$

Отсюда следует, что

$$\pi(n, i, \lambda) \sim \frac{\lambda (i-1)^{i-1} n}{e^{i-1} (n-1)!}$$

Следовательно, $\pi(n, i, \lambda)$ стремится к нулю, т.е. теорема будет корректна, если

$$\lambda = \lambda_n = 0 \left(\frac{1}{n} \right).$$

б) Пусть $i \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы $\frac{i}{n} \rightarrow p$ ($0 < p < 1$).

В этом случае

$$\pi(n, i, \lambda) \sim \frac{\lambda \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi} p(1-p)}.$$

Следовательно, полученная оценка будет корректной при малых значениях $\lambda = \lambda_n$

при условии $\lambda_n = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$;

в) Пусть $i \rightarrow \infty$; $n \rightarrow \infty$, но $\frac{i}{n} \rightarrow 0$. В этом случае легко видеть, что

$$\pi(n, i, \lambda) \sim \frac{\lambda n}{\sqrt{2\pi} \sqrt{i}}.$$

Следовательно $\pi(n, i, \lambda) \rightarrow 0$, если $\lambda = \lambda_n = 0 \left(\frac{\sqrt{i}}{n} \right)$.

г) Пусть $i \rightarrow \infty$; $n \rightarrow \infty$, таким образом, чтобы $\frac{i}{n} \rightarrow 1$.

В этом случае:

$$\pi(n, i, \lambda) \sim \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{k_n}},$$

где $k_n = \frac{n-i}{n}$. Поэтому $\pi(n, i, \lambda) \rightarrow 0$, если

$$\lambda = \lambda_n = 0 \left(\sqrt{\frac{k_n}{n}} \right).$$

Исходя из точного распределения для $u_{i,n}$ и в силу (1) аналогичным путем можно получить оценки функции концентрации для крайних членов вариационного ряда (*).

А именно, имеет место следующая

Теорема 2. При любом $\lambda \geq 0$

$$Q(u_{i,n}; \lambda) \leq \min \{1, 1 - (1 - \lambda)^n\}, \quad (7)$$

$$Q(u_{n,n}; \lambda) \leq \min \{1, 1 - (1 - \lambda)^n\}. \quad (8)$$

Доказательство. Согласно (2) и (3) имеем

$$\begin{aligned} Q(u_{1,n}; \lambda) &= \sup_{x \geq 0} P(x \leq u_{1,n} \leq x + \lambda) = \\ &= n \sup_{x \geq 0} \int_x^{x+\lambda} (1-u)^{n-1} du = n \sup_{x \geq 0} \left[-\frac{(1-u)^n}{n} \right]_x^{x+\lambda} = \sup_{x \geq 0} [(1-x)^n - (1-x-\lambda)^n]. \quad (9) \end{aligned}$$

Полагая $\varphi(x, \lambda) = (1-x)^n - (1-x-\lambda)^n$, нетрудно убедиться в том, что производная функция $\varphi(x, \lambda)$ по x неположительна, поэтому из соотношения (9), положив $x = 0$, получим

$$Q(u_{1,n}; \lambda) = 1 - (1 - \lambda)^n$$

Учитывая, что $Q(u_{1,n}; \lambda) \leq 1$ и последнего, находим

$$Q(u_{1,n}; \lambda) \leq \min \{1, 1 - (1 - \lambda)^n\}$$

Неравенство (8) доказывается аналогично.

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что функции концентрации экстремальных порядковых статистик стремится к нулю при малых значениях λ , а именно

$$\lambda = \lambda_n = 0 \left(\frac{1}{n} \right).$$

Из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие 1. При всех $2-i \leq n-1$ и $n \geq 3$ имеет место неравенство

$$Q(u_{i,n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{3\lambda\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi e}} \sqrt{\frac{n(n-1)}{(i-1)(n-i)}} \right\} \quad (10)$$

при любом $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Согласно формуле Стирлинга

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}} < n! < (2\pi)^{1/2} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}}. \quad (11)$$

Применяя (11) к правой части соотношения (6) имеем

$$Q(u_{1,n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{\lambda(n-1)n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi e}(i-1)^{1/2}(n-i)^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \times \right. \\ \left. \times \exp \left[+\frac{1}{12(i-1)+1} + \frac{1}{12(n-i)+1} - \frac{1}{12n} \right] \right\} \quad (12)$$

Ввиду того, что при $2 \leq i \leq n-1$

$$\frac{1}{12(i-1)+1} - \frac{1}{12(n-i)+1} - \frac{1}{12n} > 0 \\ \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n < 3$$

из (12) следует, что

$$Q(u_{1,n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{3\lambda\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi e}} \sqrt{\frac{n(n-1)}{(i-n)(n-i)}} \right\} \quad (13)$$

В свою очередь, из этого следствия можно получить оценки функции концентрации для выборочных квантилей.

Следствие 2. Пусть $i, n \rightarrow \infty$ так, чтобы

$$\frac{i}{n} \rightarrow p \quad (0 < p < 1).$$

Тогда при достаточно больших n справедливо неравенство

$$Q(u_{[i\delta]n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{3\lambda\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \right\}.$$

Доказательство следствия следует из (13).

Аналогичные результаты получены для отдельных порядковых статистик, составленных из выборки объема n из независимых случайных величин с произвольной функцией распределения.

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n выборка объема n с произвольной непрерывной функцией распределения $F(x)$ и

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$$

соответствующий ей вариационный ряд. Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $2 \leq i \leq n-1$ ($n \geq 3$) справедливо следующее неравенство

$$Q(X_{i,n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (i-1)^{i-1} (n-i)^{n-i} (n-1)^{-(n-1)} Q(X_1; \lambda) \right\} \quad (14)$$

Доказательство. В силу непрерывных $F(x)$, пользуясь преобразованием Колмогорова-Смирнова, имеем

$$\begin{aligned} Q(X_{i,n}; \lambda) &= \sup_{-\infty < x < \infty} P\{x \leq X_{i,n} \leq x + \lambda\} = \\ &= \sup_{-\infty < x < \infty} P\{F(x) \leq F(X_{i,n}) \leq F(x + \lambda)\} = \\ &= \sup_{-\infty < x < \infty} P\{F(x) \leq U_{i,n} \leq F(x + \lambda)\} \end{aligned} \quad (15)$$

В силу (2) и (15) получаем, что

$$Q(X_{i,n}; \lambda) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \sup_{-\infty < x < \infty} \int_{F(x)}^{F(x+\lambda)} u^{i-1} (1-u)^{n-i} du, \quad 0 \leq u \leq 1.$$

Поскольку подинтегральная функция в точке $u = u_0 = \frac{i-1}{n-1}$ имеет максимум, то из последнего следует следующее неравенство

$$Q(X_{i,n}; \lambda) \leq \min \left\{ 1, \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (i-1)^{i-1} (n-i)^{n-i} (n-1)^{-(n-1)} \int_{F(x)}^{F(x+\lambda)} du \right\}. \quad (16)$$

Учитывая

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{F(x)}^{F(x+\lambda)} du = \sup_{-\infty < x < \infty} P\{x \leq x_1 \leq x + \lambda\} = Q(X_1; \lambda)$$

и (16), нетрудно убедиться в справедливости теоремы 3.

Замечание 3. Оценка (16) будет корректной в зависимости от поведения функции концентрации $Q(X_1; \lambda)$.

Далее рассматривается вопрос об оценке функции концентрации для размаха выборки, составленной из одинаковых распределённых случайных величин с произвольной непрерывной функцией распределения.

Пусть $W_n = u_{n,n} - u_{1,n}$ размах выборки.

Рассмотрим оценку функции концентрации с.в. W_n , т.е

$$Q(W_n; \lambda) = \sup_{x \geq 0} P(x \leq W_n \leq x + \lambda)$$

для любого $\lambda \geq 0$.

Известно, (см.[1] стр.21), что плотность распределения размаха выборки W_n имеет вид:

$$f_{W_n}(\omega) = n(n-1)\omega^{n-2}(1-\omega), \quad 0 \leq \omega \leq 1. \quad (17)$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Для любого $\lambda \geq 0$ и $n \geq 3$

$$Q(W_n; \lambda) = \sup_{x \geq 0} P\{x \leq W_n \leq x + \lambda\} \leq \max\{1; n\lambda\} \quad (18)$$

Доказательство. Согласно (17) имеем

$$\begin{aligned} Q(W_n; \lambda) &= n(n-1) \sup_{x \geq 0} \int_{\infty}^{x+\lambda} \omega^{n-2} (1-\omega) d\omega = \\ &= n(n-1) \sup_{x \geq 0} \int_{\infty}^{x+\lambda} (\omega^{n-2} - \omega^{n-1}) d\omega \end{aligned} \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что подинтегральная функция имеет максимум в точке $\omega = \frac{n-2}{n-1}$.

Учитывая это, из (19) получим

$$Q(W_n; \lambda) = \min \left\{ 1; n(n-1) \sup_{x \geq 0} \int_x^{x+\lambda} \left(\frac{n-2}{n-1} \right)^{n-2} \left(1 - \frac{n-2}{n-1} \right) d\omega \right\} \leq \min(1; n\lambda)$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Оценка (18), полученная в теореме 4, будет корректной, если $\lambda = \lambda_n = 0 \left(\frac{1}{n} \right)$.

Пусть теперь $\bar{W}_n = X_{n,n} - X_{1,n}$ размах вариационного ряда.

Плотность распределения с.в. \bar{W}_n имеет вид (см.[1] стр.20)

$$f_{\bar{W}_n}(\omega) = n(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} p(u) [F(u+\omega) - F(u)]^{n-2} p(u+\omega) du \quad (20)$$

Рассмотрим функцию концентрации с.в. \bar{W}_n , т.е.

$$Q(\bar{W}_n; \lambda) = \sup_{0 \leq x < \infty} P(x \leq \bar{W}_n \leq x + \lambda); \quad \lambda \geq 0.$$

Теорема 5. Для любого $\lambda \geq 0$ и $n \geq 2$

$$Q(\bar{W}_n; \lambda) \leq \min \{ 1; n(n-1) Q(X_1; \lambda) \}. \quad (21)$$

Доказательство. В силу (20) имеем

$$\begin{aligned} Q(\bar{W}_n; \lambda) &= \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{\infty}^{x+\lambda} f_{\bar{W}_n}(\omega) d\omega = \\ &= n(n-1) \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{\infty}^{x+\lambda} \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(u) [F(u+\omega) - F(u)]^{n-2} p(u+\omega) du \right] d\omega \end{aligned} \quad (22)$$

Меняя порядок интегрирования в соотношении (22), имеем:

$$\begin{aligned} Q(\bar{W}_n; \lambda) &= n(n-1) \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \left\{ p(u) \int_x^{x+\lambda} [F(u+\omega) - F(u)]^{n-2} d[F(u+\omega) - F(u)] \right\} du = \\ &= n \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \left\{ (n-1) \int_x^{x+\lambda} [F(u+\omega) - F(u)]^{n-2} d[F(u+\omega) - F(u)] \right\} du = \end{aligned}$$

$$= n \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u) \{ [F(u+x+\lambda) - F(u)]^{n-1} - [F(u+x) - F(u)]^{n-1} \} du \quad (23)$$

Воспользовавшись равенством

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}),$$

и после элементарных выкладок получаем, что

$$Q(\bar{W}_n; \lambda) \leq \min \left\{ 1; n \sup_{0 \leq x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u)(n-1)[F(u+x+\lambda) - F(u+x)] du \right\} \leq \\ \leq \min \{ 1; n(n-1)Q(X_1; \lambda) \}$$

Замечание 5. Неравенство (21) будет информативным, если

$$\lambda = \lambda_n, Q(X_1; \lambda_n) = 0 \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Пусть X_1 имеет экспоненциальное распределение. Для этого случая можно уточнить оценку для $Q(\bar{W}_n; \lambda)$, приведенную в теореме 5.

Теорема 6. Для любого $\lambda \geq 0$ и $n \geq 2$

$$Q(\tilde{W}_n; \lambda) \leq \min \{ 1; n(1 - e^{-\lambda}) \}.$$

Доказательство. Если $F(x)$ экспоненциальное распределение, то после нескольких выкладок, получим

$$Q(\tilde{W}_n; \lambda) = n \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^{\infty} e^{-u} \left\{ [(1 - e^{-(u+x+\lambda)}) - (1 - e^{-u})]^{n-1} - [(1 - e^{-(u+x)}) - (1 - e^{-u})]^{n-1} \right\} du = \\ = n \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^{\infty} e^{-u} \left\{ [e^{-u} - e^{-(u+x+\lambda)}]^{n-1} - [e^{-u} - e^{-(u+x)}]^{n-1} \right\} du = \\ = n \sup_{0 \leq x < \infty} \int_0^{\infty} e^{-nu} \left\{ [1 - e^{-(x+\lambda)}]^{n-1} - [1 - e^{-x}]^{n-1} \right\} du = \\ = n \sup_{0 \leq x < \infty} \left\{ [1 - e^{-(x+\lambda)}]^{n-1} - [1 - e^{-x}]^{n-1} \right\} \int_0^{\infty} e^{-nu} du \leq n(1 - e^{-\lambda})$$

Из доказанной теоремы 6 следует, что

$$Q(\tilde{W}_n; \lambda) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda = \lambda_n = 0 \left(\frac{1}{n} \right).$$

References:

1. David G. Porjadkovye statistiki. – M.: Nauka, 1979, 336 s.
2. Petrov V.V. Summy nezavisimyh sluchaynyh velichin. -M., 1972.
3. Madrakhimov A.E. O funktsii kontsentratsii dlya lineynyh kombinatsiy poryadkovykh statistic. Izv. AN UzSSR, seriya fiz.mat.nauk, 1981, № 5. S.12-17.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).