ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

4-2019

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 519.21

ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

ТАРТИБЛАНГАН СТАТИСТИКАЛАР УЧУН КОНЦЕНТРАЦИЯ ФУНКЦИЯСИНИНГ БАҲОЛАРИ

ESTIMATION OF THE FUNCTION OF CONSENTRATION FOR AN ORDERED STATISTICS

А.Э.Мадраҳимов

Аннотация

Мақолада тартибла нган статистикалар ва танланма кўлами учун концентрация функциясини баҳолаш масаласи ўрганилган.

Аннотация

В статье изучен вопрос об оценке функции концентрации для порядковых статистик и размаха выборки.

Annotation

This article examines the issue of estimating the concentration function for ordinal statistics and sample size.

***Таянч сўз ва иборалар**: тартибланган статистикалар, танланма кўлами, концентрация функциясининг баҳоси.*

***Ключевые слова и выражения**: порядковые статистики, размах выборки, оценки функции концентрации.*

***Keywords and expressions:** order statistics, sample size, concentration function estimates.*

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_n$ выборка объёма из равномерно [0,1] распределенных случайных величин и

$$u_{1,n} < u_{2,n} < \dots < u_{n,n} \tag{1}$$

соответствующий ей вариационный ряд.

Исследуем оценку функций концентрации случайных величин $u_{1,n}$, т.е.

$$Q(u_{1,n};\lambda) = \sup_{x\ge 0} P\{x \le u_{1,n} \le x+\lambda\}$$

при любом $\lambda \ge 0$.

Известно [2], что

$$P(u_{1,n} < x) = \frac{n!}{(i-1)(n-i)!}\int_0^x u^{i-1}(1-u)^{n-1}du, \quad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

а также

$$f_{i,n}(x)\frac{d}{dx}P(u_{i,n},x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}\ (1-x)^{n-i}, & 0\le x\le 1, \\ 0 & \text{â äðóãèõ ñëó÷àÿõ} \end{cases} \tag{3}$$

Имеет место следующая.

Теорема 1. Пусть $2\le i\le n-1$. Тогда для любого $\lambda\ge 0$

$$Q(u_{i,n};\lambda) \le \min\left\{1, \frac{\lambda n!}{(i-1)!(n-i)!}(i-1)^{i-1}(n-i)^{n-i}(n-1)^{-(n-1)}\right\}. \tag{4}$$

Доказательство. В силу (1) и (2) имеем

$$Q(u_{i,n};\lambda) = \sup_{x\ge 0}\int_x^{x+\lambda} f_{i,n}(u)du = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!}\sup_{x\ge 0}\int_x^{x+\lambda} u^{i-1}(1-u)^{n-i}du. \tag{5}$$

исследуем поведение под интегральной функции в соотношении (5).

Положим

А.Э.Мадрахимов – ФерГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.

$$\varphi_{i,n}(u) = u^{i-1}(1-u)^{n-i}, \quad 0 \le u \le 1.$$

нетрудно убедиться в том, что при $2 \le i \le n-1$ функция $\varphi_{i,n}(u)$ в точке $u = u_0 = \dfrac{i-1}{n-1}$ имеет максимум.

С учетом последнего получаем следующее неравенство

$$Q(u_{i,n};\lambda) \le \min\left\{1, \frac{n!}{(i-n)!(n-i)!}\varphi_{i,n}\left(\frac{i-1}{n-1}\right)\sup_{x\le 0}\int_x^{x+\lambda} du\right\} =$$

$$= \min\left\{1, \frac{\lambda n!}{(i-1)!(n-i)!}(i-1)^{i-1}(n-i)^{n-i}(n-1)^{-(n-1)}\right\}. \qquad (6)$$

Замечание 1. Корректность теоремы 1 определяется поведением

$$\pi(n,i,\lambda) = \frac{\lambda n!}{(i-1)!(n-i)!}(i-1)^{i-1}(n-i)^{n-i}(n-1)^{-(n-1)}.$$

при различных значениях n, i, λ.

Изучим асимптотическое поведение этого выражения:

а) Пусть i - фиксировано. По формуле Стирлинга

$$n! \sim n^n\sqrt{2\pi n e^{-n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\pi(n,i,\lambda) \sim \frac{\lambda(i-1)^{i-1} n}{e^{i-1}(n-1)!}$$

Следовательно, $\pi(n,i,\lambda)$ стремится к нулю, т.е. теорема будет корректна, если

$$\lambda = \lambda_n = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

б) Пусть $i \to \infty, \; n \to \infty$ таким образом, чтобы $\dfrac{i}{n} \to p \quad (0 < p < 1)$.

В этом случае

$$\pi(n,i,\lambda) \sim \frac{\lambda\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\; p(1-p)}.$$

Следовательно, полученная оценка будет корректной при малых значениях $\lambda = \lambda_n$ при условии $\lambda_n = 0\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

в) Пусть $i \to \infty; \; n \to \infty,$ но $\dfrac{i}{n} \to 0$. В этом случае легко видеть, что

$$\pi(n,i,\lambda) \sim \frac{\lambda n}{\sqrt{2\pi}\sqrt{i}}.$$

Следовательно $\pi(n,i,\lambda)\to 0$, если $\lambda=\lambda_n=0\left(\frac{\sqrt{i}}{n}\right)$.

г) Пусть $i\to\infty;\ n\to\infty,$ таким образом, чтобы $\frac{i}{n}\to 1$.

В этом случае:

$$\pi(n,i,\lambda)\sim\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{k_n}},$$

где $k_n=\frac{n-i}{n}$. Поэтому $\pi(n,i,\lambda)\to 0$, если

$$\lambda=\lambda_n=0\left(\sqrt{\frac{k_n}{n}}\right).$$

Исходя из точного распределения для $u_{i,n}$ и в силу (1) аналогичным путем можно получить оценки функции концентрации для крайних членов вариационного ряда (*).

А именно, имеет место следующая

Теорема 2. При любом $\lambda\geq 0$

$$Q(u_{i,n};\lambda)\leq\min\{1,1-(1-\lambda)^n\}, \tag{7}$$

$$Q(u_{n,n};\lambda)\leq\min\{1,1-(1-\lambda)^n\}. \tag{8}$$

Доказательство. Согласно (2) и (3) имеем

$$Q(u_{1,n};\lambda)=\sup_{x\geq 0}P(x\leq u_{1,n}\leq x+\lambda)=$$

$$=n\sup_{x\geq 0}\int_x^{x+\lambda}(1-u)^{n-1}du=n\sup_{x\geq 0}\left[-\frac{(1-u)^n}{n}\right]\Bigg|_x^{x+\lambda}=\sup_{x\geq 0}[(1-x)^n-(1-x-\lambda)^n]. \tag{9}$$

Полагая $\varphi(x,\lambda)=(1-x)^n-(1-x-\lambda)^n$, нетрудно убедиться в том, что производная функция $\varphi(x,\lambda)$ по *x* неположительна, поэтому из соотношения (9), положив $x=0$, получим

$$Q(u_{1,n};\lambda)=1-(1-\lambda)^n$$

Учитывая, что $Q(u_{1,n};\lambda)\leq 1$ и последнего, находим

$$Q(u_{1,n};\lambda)\leq\min\{1,1-(1-\lambda)^n\}$$

Неравенство (8) доказывается аналогично.

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что функции концентрации экстремальных порядковых статистик стремится к нулю при малых значениях λ, а именно $\lambda=\lambda_n=0\left(\frac{1}{n}\right)$.

Из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие 1. При всех $2-i\leq n-1$ и $n\geq 3$ имеет место неравенство

$$Q(u_{i,n};\lambda)\le\min\left\{1,\frac{3\lambda\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi e}}\sqrt{\frac{n(n-1)}{(i-1)(n-i)}}\right\} \qquad (10)$$

при любом $\lambda\ge 0$.

Доказательство. Согласно формуле Стирлинга

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{1}{12+1}}<n!<(2\pi)^{1/2}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{1}{12n}}. \qquad (11)$$

Применяя (11) к правой части соотношения (6) имеем

$$Q(u_{1,n};\lambda)\le\min\left\{1,\frac{\lambda(n-1)n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi e}(i-1)^{1/2}(n-i)^{1/2}}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\times\right.$$

$$\left.\times\exp-\left[+\frac{1}{12(i-1)+1}+\frac{1}{12(n-i)+1}-\frac{1}{12n}\right]\right\} \qquad (12)$$

Ввиду того, что при $2\le i\le n-1$

$$\frac{1}{12(i-1)+1}-\frac{1}{12(n-i)+1}-\frac{1}{12n}>0$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}<3$$

из (12) следует, что

$$Q(u_{1,n};\lambda)\le\min\left\{1,\ \frac{3\lambda\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}e}\sqrt{\frac{n(n-1)}{(i-n)(n-i)}}\right\} \qquad (13)$$

В свою очередь, из этого следствия можно получить оценки функции концентрации для выборочных квантилей.

Следствие 2. Пусть $i,n\to\infty$ так, чтобы

$$\frac{i}{n}\to p \qquad (0<p<1).$$

Тогда при достаточно больших *n* справедливо неравенство

$$Q(u_{[\text{ïð}]n};\lambda)\le\min\left\{1,\ \frac{3\lambda\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}e}\cdot\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right\}.$$

Доказательство следствия следует из (13).

Аналогичные результаты получены для отдельных порядковых статистик, составленных из выборки объема *n* из независимых случайных величин с произвольной функцией распределения.

Пусть $X_1,X_2,\dots,X_n$ выборка объёма *n* с произвольной непрерывной функцией распределения $F(x)$ и

$$X_{1,n}\le X_{2,n}\le\dots\le X_{n,n}$$

соответствующий ей вариационный ряд. Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $2\le i\le n-1\ (n\ge 3)$ справедливо следующее неравенство

$$Q(X_{i,n};\lambda)\le \min\left\{1,\ \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(i-1)^{i-1}(n-i)^{n-i}(n-1)^{-(n-1)}Q(X_1;\lambda)\right\} \quad (14)$$

Доказательство. В силу непрерывных *F*(*x*), пользуясь преобразованием Колмогорова-Смирнова, имеем

$$Q(X_{i,n};\lambda)=\sup_{-\infty<x<\infty} P\left\{x\le X_{i,n}\le x+\lambda\right\}=$$
$$=\sup_{-\infty<x<\infty} P\left\{F(x)\le F(X_{i,n})\le F(x+\lambda)\right\}=$$
$$=\sup_{-\infty<x<\infty} P\left\{F(x)\le U_{i,n}\le F(x+\lambda)\right\} \quad (15)$$

В силу (2) и (15) получаем, что

$$Q(X_{i.n};\lambda)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\sup_{-\infty<x<\infty}\int_{F(x)}^{F(x+\lambda)} u^{i-1}(1-u)^{n-i}du,\quad 0\le u\le 1.$$

Поскольку подинтегральная функция в точке $u=u_0=\dfrac{i-1}{n-1}$ имеет максимум, то из последнего следует следующее неравенство

$$Q(X_{i.n};\lambda)\le \min\left\{1,\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(i-1)^{i-1}(n-i)^{n-i}(n-1)^{-(n-1)}\int_{F(x)}^{F(x+\lambda)}du\right\}. \quad (16)$$

Учитывая

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\int_{F(x)}^{F(x+\lambda)}du=\sup_{-\infty<x<\infty}P\{x\le x_1\le x+\lambda\}=Q(X_1;\lambda)$$

и (16), нетрудно убедиться в справедливости теоремы 3.

Замечание 3. Оценка (16) будет корректной в зависимости от поведения функции концентрации $Q(X_1;\lambda)$.

Далее рассматривается вопрос об оценке функции концентрации для размаха выборки, составленной из одинаковых распределённых случайных величин с произвольной непрерывной функцией распределения.

Пусть $W_n=u_{n,n}-u_{1,n}$ размах выборки.

Рассмотрим оценку функции концентрации с.в. W_n, т.е

$$Q(W_n;\lambda)=\sup_{x\ge 0}P(x\le W_n\le x+\lambda)$$

для любого $\lambda\ge 0$.

Известно, (см.[1] стр.21), что плотность распределения размаха выборки W_n имеет вид:

$$f_{W_n}(\omega)=n(n-1)\omega^{n-2}(1-\omega),\quad 0\le\omega\le 1. \quad (17)$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Для любого $\lambda\ge 0$ и $n\ge 3$

$$Q(W_n;\lambda)=\sup_{x\ge 0}P\{x\le W_n\le x+\lambda\}\le \max\{1;n\lambda\} \quad (18)$$

Доказательство. Согласно (17) имеем

$$Q(W_n;\lambda)=n(n-1)\sup_{x\geq 0}\int\limits_{\infty}^{x+\lambda}\omega^{n-2}(1-\omega)d\omega=$$
$$=n(n-1)\sup_{x\geq 0}\int\limits_{\infty}^{x+\lambda}(\omega^{n-2}-\omega^{n-1})d\omega \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что подинтегральная функция имеет максимум в точке $\omega=\dfrac{n-2}{n-1}$.
Учитывая это, из (19) получим

$$Q(W_n;\lambda)=\min\left\{1;n(n-1)\sup_{x\geq 0}\int\limits_{x}^{x+\lambda}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{n-2}\left(1-\frac{n-2}{n-1}\right)d\omega\right\}\leq\min(1;n\lambda)$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 4. Оценка (18), полученная в теореме 4, будет корректной, если $\lambda=\lambda_n=0\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Пусть теперь $\overline{W}_n=X_{n,n}-X_{1,n}$ размах вариационного ряда.

Плотность распределения с.в. $\overline{W}_n$ имеет вид (см.[1] стр.20)

$$f_{\overline{W}_n}(\omega)=n(n-1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(u)[F(u+\omega)-F(u)]^{n-2}p(u+\omega)du \tag{20}$$

Рассмотрим функцию концентрации с.в. $\overline{W}_n$, т.е.

$$Q(\overline{W}_n;\lambda)=\sup_{0\leq x\leq\infty}P(x\leq\overline{W}_n\leq x+\lambda);\ \ \lambda\geq 0.$$

Теорема 5. Для любого $\lambda\geq 0$ и $n\geq 2$

$$Q(\overline{W}_n;\lambda)\leq\min\{1;n(n-1)Q(X_1;\lambda)\}. \tag{21}$$

Доказательство. В силу (20) имеем

$$Q(\overline{W}_n;\lambda)=\sup_{0\leq x<\infty}\int\limits_{\infty}^{x+\lambda}f_{\overline{W}_n}(\omega)d\omega=$$
$$=n(n-1)\sup_{0\leq x<\infty}\int\limits_{\infty}^{x+\lambda}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(u)[F(u+\omega)-F(u)]^{n-2}p(u+\omega)du\right]d\omega \tag{22}$$

Меняя порядок интегрирования в соотношении (22), имеем:

$$Q(\overline{W}_n;\lambda)=n(n-1)\sup_{0\leq x<\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(u)\left\{p(u)\int\limits_{x}^{x+\lambda}[F(u+\omega)-F(u)]^{n-2}d[F(u+\omega)-F(u)]\right\}du=$$
$$=n\sup_{0\leq x<\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(u)\left\{(n-1)\int\limits_{x}^{x+\lambda}[F(u+\omega)-F(u)]^{n-2}d[F(u+\omega)-F(u)]\right\}du=$$

$$= n \sup_{0 \le x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u)\{[F(u+x+\lambda) - F(u)]^{n-1} - [F(u+x) - F(u)]^{n-1}\}du \qquad (23)$$

Воспользовавшись равенством

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}),$$

и после элементарных выкладок получаем, что

$$Q(\overline{W}_n;\lambda) \le \min\left\{1; n \sup_{0 \le x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(u)(n-1)[F(u+x+\lambda) - F(u+x)]du\right\} \le$$

$$\le \min\{1; n(n-1)Q(X_1;\lambda)\}$$

Замечание 5. Неравенство (21) будет информативным, если

$$\lambda = \lambda_n, Q(X_1;\lambda_n) = 0\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Пусть X_1 имеет экспоненциальное распределение. Для этого случая можно уточнить оценку для $Q(\overline{W}_n;\lambda)$, приведенную в теореме 5.

Теорема 6. Для любого $\lambda \ge 0$ и $n \ge 2$

$$Q\left(\tilde{\overline{W}}_n;\lambda\right) \le \min\{1; n(1-e^{-\lambda})\}.$$

Доказательство. Если $F(x)$ экспоненциальное распределение, то после нескольких выкладок, получим

$$Q\left(\tilde{\overline{W}}_n;\lambda\right) = n \sup_{0 \le x < \infty} \int_0^{\infty} e^{-u} \left\{\left[(1-e^{-(u+x+\lambda)}) - (1-e^{-u})\right]^{n-1} - [(1-e^{-(u+x)}) - (1-e^{u})]^{n-1}\right\}du =$$

$$= n \sup_{0 \le x < \infty} \int_0^{\infty} e^{-u} \left\{\left[e^{-u} - e^{-(u+x+\lambda)}\right]^{n-1} - \left[e^{-u} - e^{-(u+x)}\right]^{n-1}\right\}du =$$

$$= n \sup_{0 \le x < \infty} \int_0^{\infty} e^{-nu} \left\{\left[1-e^{-(x+\lambda)}\right]^{n-1} - [1-e^{-x}]^{n-1}\right\}du =$$

$$= n \sup_{0 \le x < \infty} \left\{\left[1-e^{-(x+\lambda)}\right]^{n-1} - \left[1-e^{-x}\right]^{n-1}\right\} \int_0^{\infty} e^{-nu}du \le n(1-e^{-\lambda})$$

Из доказанной теоремы 6 следует, что

$$Q\left(\tilde{\overline{W}}_n;\lambda\right) \to 0 \text{ при } \lambda = \lambda_n = 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

References:

1. David G. Porjadkovye statistiki. – M.: Nauka, 1979, 336 s.
2. Petrov V.V. Summy nezavisimyh sluchaynyh velichin. -M., 1972.
3. Madrakhimov A.E. O funktsii kontsentratsii dlya lineynyh kombinatsiy poryadkovyh statistic. Izv. AN UzSSR, seriya fiz.mat.nauk, 1981, № 5. S.12-17.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).