ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

1-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

УДК: 517.9

ЎНГ ТОМОНИ НОМАЪЛУМ БЎЛГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕИЗВЕСТНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

BOUNDARY PROBLEMS FOR A SIMPLE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER LINEAR WITH UNKNOWN RIGHT SIDE

Г.Тиллабаева

Аннотация

Мақолада иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама учун чегаравий масала ечимининг топиш усули баён қилинган.

Аннотация

В данной статье изложен метод нахождения краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Annotation

In this article, explaining a method of solving the boundary problem for a simple differential equation of the second order linear.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, чегаравий масала, Грин фуикцияси.*

Ключевые слова и выражения: *обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, функция Грин.*

Keywords and exspressions: *a simple differential equation, boundary problem, function of Grin.*

Бизга $[a,b]$ кесмада қуйидаги иккинчи тартибли оддий чизиқли дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$\left[P(x)y'\right]' + Q(x)y = f(x),\ \ x\in(a,b).$$

Маълумки $[1]$, бу ерда $P(x)$, $P'(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ -берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $P(x)\neq 0$, $x\in[a,b]$ бўлса, бундай чизиқли оддий дифференциал тенгламанинг $y(a)=0$ ва $y(b)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ягона ечими мавжуд. Қаралаётган дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масаланинг интеграл чизиғи бошқа бир ёки бир неча нуқталардан ўтишини аниқлаш ҳам муҳим масаладир. Қуйида биз ана шундай хоссага эга бўлган икки тенглама ва уларга мос ечимни топишнинг бир усулини кўрсатамиз.

$P(x)$, $P'(x)$, $Q(x)$ ва $f(x)$ -$[a,b]$ да аниқланган ва узлуксиз функциялар ва $P(x)\neq 0$, $x\in[a,b]$ бўлсин, k_j ва x_j, $j=\overline{1,n}$ берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $a<x_1<x_2<...<x_n<b$; $c(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{n-1}x^n$ -номаълум кўпҳад, яъни a_j, $j=\overline{0,n-1}$-номаълум ҳақиқий сонлар бўлсин.

У ҳолда ушбу тенглама

$$\left[P(x)y'\right]' + Q(x)y = c(x)\cdot f(x),\ \ x\in(a,b) \qquad (1)$$

учун қуйидаги кўп нуқтали чегаравий масалани қўйиш мумкин.

1-масала. $c(x)$ кўпҳад шундай аниқлансинки, (1) тенгламанинг

Г.Тиллабаева *– ФарДУ, физика-математика факультети математика ўқитиш методикаси йўналиши талабаси.*

$$y(a)=0,\ y(x_1)=k_1,\ ...,y(x_n)=k_n\ ,\ y(b)=0 \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

Ечиш. Агар $c(x)$ маълум функция бўлса, (1) тенгламанинг $y(a)=0$ ва $y(b)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ягона ечими мавжуд ва у

$$y(x)=\int_a^b c(s)G(x,s)f(s)ds \tag{3}$$

формула билан аниқланади $[1]$, бу ерда $G(x,s)$ -$\{(1),\ y(a)=0,\ y(b)=0\}$ масаланинг Грин функцияси.

(3) функцияни (2) шартларнинг қолган n та шартига бўйсундирайлик:

$$y(x_j)=\int_a^b c(s)G(x_j,s)f(s)ds=k_j,\quad j=\overline{1,n}\ .$$

Бу тенгликларни $c(s)$ кўпҳаднинг ёйилмасидан фойдаланиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m\cdot\int_a^b s^m G(x_j,s)f(s)ds=k_j\ ,\qquad j=\overline{1,n}\ . \tag{4}$$

(4)- a_m , $m=\overline{0,n-1}$ номаълум коэффициентларга нисбатан n номаълумли n та чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилади.

Бу системанинг асосий детерминантини Δ билан белгилайлик, яъни

$$\Delta=\left|\int_a^b s^m\cdot G(x_j,s)f(s)ds\right|_{m=\overline{0,n-1}}^{j=\overline{1,n}},$$

Δ_m билан эса Δ нинг m -устуни $k_m,\ m=\overline{1,n}$ билан алмаштирилган детерминантни белгилайлик. У ҳолда, чизиқли алгебраик тенгламалар назариясига $[2]$ асосан қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин.

1. $\Delta\neq 0$. Унда (4) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади. Бу ердан топилган a_m , $m=\overline{0,n-1}$ ларни (3) формулага қўйиб, масаланинг ягона ечимига эга бўламиз.

2. $\Delta\equiv 0$, $\Delta_m\equiv 0$, $m=\overline{0,n-1}$. Унда (4) тенгламалар системаси чексиз кўп ечимларга эга бўлади ва $a_m,\ m=\overline{0,n-1}$ сифатида ихтиёрий ҳақиқий сонни олиш мумкин. Демак, (3) формулада $c(s)$ ўрнига ихтиёрий $(n-1)$ -даражали кўпҳадни қўйиб, масаланинг чексиз кўп ечимига эга бўламиз.

3. $\Delta\equiv 0$, $\Delta_s\neq 0$, бу ерда $s\in N$, $1\le s\le n$. Бунда (4) тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди. Демак, $\{(1),(2)\}$ масаланинг ечими ҳам мавжуд эмас, яъни ҳар қандай $c(s)$ кўпҳад олинганда ҳам (1) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлмайди. 1-масала тўла ҳал бўлди.

Энди ушбу оддий дифференциал тенглама берилган бўлсин:

$$\left[P(x)y'\right]' + Q(x)y = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot f_j(x), \ \ x \in (a,b), \tag{5}$$

бу ерда $P(x)$, $Q(x)$ ва $f_j(x)$ $j=\overline{1,n}$ - берилган узлуксиз функциялар, c_j, $j=\overline{1,n}$ - номаълум параметрлар.

2-масала. $c_1, c_2, ..., c_n$- номаълум параметрларнинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин.

Ечиш. (5) тенгламанинг (2) шартларнинг биринчи ва охиргисини қаноатлантирувчи ечимини ушбу кўринишда ёзиш мумкин [1]:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b G(x,s) f_j(s) ds. \tag{6}$$

(6) функцияни (2) шартларнинг қолган *n* тасига бўйсундирайлик:

$$y(x_m) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b G(x_m,s) f_j(s) ds = k_m, \quad m=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Агар $A_{j_m} = \int_a^b G(x_m,s) f_j(s) ds$, $j,m=\overline{1,n}$ белгилашни киритсак, у ҳолда (7) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jm} c_j = k_m, \ m=\overline{1,n}, \tag{8}$$

(8) - c_j, $j=\overline{1,n}$ ларга нисбатан *n* номаълумли *n* та чизиқли алгебраик тенгламалар системаси бўлиб, унинг асосий детерминанти $\widetilde{\Delta} = \left\| A_{j,m} \right\|_{j,m=\overline{1,n}}$ дан иборат.

(8) тенгламалар системаси учун қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\widetilde{\Delta} \neq 0$. У ҳолда (8) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади.

2) $\widetilde{\Delta} = 0$, $\widetilde{\Delta}_j = 0$, $j=\overline{1,m}$ бу ерда $\widetilde{\Delta_j}$ - $\widetilde{\Delta}$ даги *j* устун элементларини k_m, $m=\overline{1,n}$ сонлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминант. У ҳолда (8) тенгламалар системаси чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

3) $\widetilde{\Delta} = 0$, $\widetilde{\Delta_s} \neq 0$, бу ерда $s = const \in N$ ва $1 \le s \le n$. У ҳолда (8) тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди.

1) ва 2) ҳолларда (8) тенгламалар системасидан топилган c_j, $j=\overline{1,n}$ ларни (6) формулага қўйиб, {(5),(2)} масаланинг ечимига эга бўламиз.

Демак, {(5),(2)} масала $\widetilde{\Delta} \neq 0$ бўлганда ягона ечимга, $\widetilde{\Delta} = 0$, $\widetilde{\Delta_j} = 0$, $j=\overline{1,n}$ тенгликлар бажарилганда эса чексиз кўп ечимларга эга бўлади.

Адабиётлар

1. Бойқузиев Қ.Б. Дифференциал тенгламалар. – Т.: Ўқитувчи, 1983.
2. Курош А.К. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).