ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2018
ИЮНЬ

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК 517.927

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ ВА БИРИНЧИ ТУР ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

М.Абдуманнопов

Аннотация

Ушбу мақолада иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун Бицадзе-Самарский шартли ва биринчи тур интеграл шартли масала ўрганилган.

Аннотация

В настоящей работе изучена задача с интегральным условием первого рода и условием Бицадзе-Самарского для простого дифференциального уравнения второго порядка.

Annotation

In the paper, a problem with Bitsadze-Samarski condition and first-type integral condition for the second order ordinary differential equation is studied.

Таянч сўз ва иборалар: *дифференциал тенглама, чегаравий масала, Бицадзе-Самарский шарти, интеграл шарти, интеграл тенглама.*

Ключевые слова и выражения: *дифференциальное уравнение, краевая задача, условие Бицадзе-Самарского, интегральное условие, интегральное уравнение.*

Keywords and expressions: *differential equation, boundary-value problem, Bitsadze-Samarski condition , integral condition, integral equation.*

Иккинчи тартибли чизиқли ушбу

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=f(x), \qquad x\in(-1,1) \tag{1}$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $b(x), c(x), f(x)$ -берилган узлуксиз функциялар, $y=y(x)$-номаълум функция.

BSI масала. (1) тенгламанинг $C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ синфга тегишли шундай ечими топилсинки, у

$$y(-1)=\alpha y(\eta)+k_1, \tag{2}$$

$$\int_{\beta}^{1} y(\xi)d\xi=k_2 \tag{3}$$

шартларни қаноатлантирсин, бу ерда η,α , k_1 ва k_2 - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\eta,\beta\in(-1,1), \eta<\beta$.

$\eta\in(-1,1)$ бўлганлиги учун $\alpha\neq 0$ бўлганда (1.11)-Бицадзе-Самарский шарти бўлади. Одатда (3) кўринишдаги тенглик 1-тур интеграл шарт, дейилади [1.164].

1-лемма. *Агар (x_0,x_1) оралиқда $c(x)<0$ тенгсизлик бажарилса,*

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0 \quad x\in(x_0,x_1) \tag{1'}$$

бир жинсли тенгламанинг ечими (x_0,x_1) оралиқда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди.

Исбот. Фараз қилайлик $(1')$ тенгламанинг $y(x)$ ечими $x=z\in(x_0,x_1)$ нуқтада мусбат максимумга (манфий минимумга) эришсин. У ҳолда $y''(z)\le 0(\ge 0)$, $y'(z)=0$, $c(z)y(z)<0(>0)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Булардан қуйидаги тенгсизликнинг ҳам ўринли эканлиги келиб чиқади:

$$y''(z)+b(z)y'(z)+c(z)y(z)<0(>0)\,.$$

М.Абдуманнопов – *ФарДУ физика-математика факультети 4-курс талабаси.*

Бу эса $(1')$ тенгламага зиддир. Демак, фаразимиз нотўғри. 1-лемма исботланди.

2-лемма. *Агар $g(x)$ функция $[x_0,x_1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,*

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx = 0 \qquad (4)$$

тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда шундай $z\in(x_0,x_1)$ сон мавжудки, $g(z)=0$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Агар $[x_0,x_1]$ сегментда $g(x)\ge 0$ ёки $g(x)\le 0$ бўлса, (4) тенглик ўринли бўлмайди. Фараз қилайлик, (4) тенглик бажарилсин.Унда 2 та ҳол бўлиши мумкин: 1) $g(x)\equiv 0$, $x\in[x_0,x_1]$. Бунда теорема исбот бўлади ва z сифатида (x_0,x_1) оралиқдаги ихтиёрий сонни олиш мумкин. 2) $g(x)$- $[x_0,x_1]$сегментда ишораси алмашинувчи функция. Унда $g(x)\in C[x_0,x_1]$ бўлганлиги учун шундай $z\in(x_0,x_1)$ сон мавжуд бўладики, бунда $g(z)=0$ тенглик ўринли бўлади. 2-лемма исботланди.

3-лемма. *Агар $c(x)<0$, $x\in(-1,x_0)$ ва $|\alpha|\le 1$ тенгсизликлар ўринли бўлса,*

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0, \qquad x\in(-1,x_0); \qquad (5)$$

$$y(-1)=\alpha y(\eta), \quad y(x_0)=0 \qquad (6)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик: $\{(5),(6)\}$ масала $y(x)\not\equiv 0,\ x\in[-1,x_0]$ ечимга эга бўлсин, у ҳолда, Вейерштрасс теоремасига асосан $[2]$, шундай $z\in[-1,x_0]$ сон мавжудки, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\sup_{[-1,x_0]}|y(x)|=|y(z)|>0.$$

1-леммага кўра $z\notin(-1,x_0)$. (6) тенгликларнинг иккинчисига асосан эса $z\ne x_0$. Демак, $z=-1$. У ҳолда $|y(\eta)|<|y(-1)|$ бўлиб, (6) дан $|y(-1)|=|\alpha y(\eta)|\le|y(\eta)|<|y(-1)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизлик келиб чиқади. Бу қарама-қаршиликдан эса фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[-1,x_0]$. 3-лемма исботланди.

4-лемма. *Агар $c(x)<0$, $x\in(x_0,x_1)$ ва $|\alpha|\le 1$ тенгсизликлар ўринли бўлса,*

$$y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0, \qquad x\in(x_0,x_1); \qquad (7)$$

$$y(x_0)=0, \quad y(x_1)=0 \qquad (8)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик: $\{(7),(8)\}$ масала $y(x)\not\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ ечимга эга бўлсин, у ҳолда шундай $z\in[x_0,x_1]$ сон мавжудки, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади [2.416]:

$$\sup_{[x_0,x_1]}|y(x)|=|y(z)|>0.$$

(8) тенгликларга асосан $z\ne x_0,\ z\ne x_1$, демак, $z_1\in(x_0,x_1)$. Буни эътиборга олсак, $x=z$ бўлганда $y(x)$ функция мусбат максимумга ёки манфий минимумга эга бўлади. 1-леммага асосан эса бундай бўлиши мумкин эмас. Бу қарама-қаршиликлардан фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$. 4 - лемма исботланди.

1-теорема. *Агар* $c(x) < 0$, $x \in (-1,1)$ *ва* $|\alpha| \le 1$ *тенгсизликлар бажарилса, BSI масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. BSI масаланинг $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлари мавжуд деб, тескаридан фараз қилайлик.Унда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0,\ x \in (-1,1); \tag{9}$$

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad \int_{\beta}^{1} y(x)dx = 0 \tag{10}$$

шартларни қаноатлантиради.

(10) тенгликларнинг иккинчисини эътиборга олсак, 2-леммага асосан $\tau_1 \in (\beta, 1$ сон мавжудки, $y(\tau_1) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

У ҳолда 3-леммага асосан (9) тенгламанинг $[-1, \tau_1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad y(\tau_1) = 0 \tag{11}$$

демак, (10) шартларни қаноатлантирувчи ечими $y(x) \equiv 0,\ x \in [-1, \tau_1]$.

Буни эътиборга олсак, $\{(9),(10)\}$ масаладан

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in (\tau_1, 1);$$

$$y(\tau_1) = 0, \quad \int_{\tau_1}^{1} y(x)dx = 0$$

масала келиб чиқади.

Юқоридаги мулоҳазани бу масалага қўлласак, яна шундай $\tau_2 \in (\tau_1, 1)$ сонлар мавжудки, $[\tau_1, \tau_2]$ сегментда $y(x) \equiv 0$ деган хулосага эга бўламиз.

Шу жараённи кетма-кет такрорлаб, $[-1,1]$ оралиқда ётувчи шундай $[-1,\tau_1],[\tau_1,\tau_2],[\tau_3,\tau_4],...[\tau_{n-1},\tau_n],...$ сегментлар кетма-кетлигига эга бўламизки, бунда $y(x) \equiv 0,\ \ x \in [\tau_{n-1}, \tau_n]\ \ n = 1,2,...$(бу ерда $\tau_0 = -1$) ва $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 1$ тенгликлар ўринли бўлади. Булардан эса, $y(x)$ функциянинг $[-1,1]$ сегментда узлуксизлигига асосан, $y(x) \equiv 0$, $x \in [-1,1]$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $y_1(x) \equiv y_2(x),\ x \in [-1,1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 1-теорема шартлари ва* $b(x) \in C^1[-1,1]$, $3 - \beta(2+\beta) + \alpha(\beta^2 - 1) + 2\alpha\eta(1-\beta) \ne 0$ *шартлар бажарилган бўлса, BSI масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x), \quad x \in (-1,1) \tag{12}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда $f_1(x) = f(x) - b(x)y'(x) - c(x)y(x)$.

Маълумки [1], (12) тенгламанинг ечими учун,

$$y(x) = \frac{1}{2}y(-1)(1-x) + \frac{1}{2}y(1)(1+x) + \int_{-1}^{1} G(x,t)f_1(t)dt,\ x \in [-1,1] \tag{13}$$

тенглик ўринли бўлади.

(13) тенгликка $f_1(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра $y'(t)$ иштирок этган ҳадни бўлаклаб интегралласак,

$$y(x) = \frac{1}{2}y(-1)(1-x) + \frac{1}{2}y(1)(1+x) + \int_{-1}^{1} G(x,t)f(t)dt +$$

$$+\int_{-1}^{1} y(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[b(t)G(x,t)\right]-c(t)G(x,t)\right\}dt \qquad (14)$$

тенгликка эга бўламиз.

$y(x)$ функциянинг бу ифодасини (2) ва (3) шартларга қўямиз. Натижада $y(-1)$ ва $y(1)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha\eta}{2}\right)y(-1)-\frac{\alpha}{2}(1+\eta)y(1)=k_1+$$

$$+\alpha\left[\int_{-1}^{1} G(\eta,t)f(t)dt+\int_{-1}^{1} y(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[b(t)G(\eta,t)\right]-c(t)G(\eta,t)\right\}dt\right],$$

$$\frac{1}{4}(1-\beta)^2 y(-1)+\frac{1}{4}\left(3-2\beta-\beta^2\right)y(1)=k_2-$$

$$-\int_{-1}^{1}\int_{\beta}^{1} G(\xi,t)f(t)\,d\xi\,dt-\int_{-1}^{1}\int_{\beta}^{1} y(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[b(t)G(\xi,t)\right]-c(t)G(\xi,t)\right\}d\xi\,dt \qquad (15)$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Теорема шартига асосан (15) тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли. Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва ягона. $y(-1)$ ва $y(1)$ ларнинг (15) дан топилган қийматларини (14) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг, $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан

$$y(x)-\int_{-1}^{1} K_2(x,t)y(t)dt=\Phi_2(x), \qquad x\in(-1,1) \qquad (16)$$

кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига [3] эга бўламиз,бу ерда $K_2(x,t)$ - бўлакли узлуксиз ва чегараланган маълум функция, $\Phi_2(x)$ эса $C^2[-1,1]$ синфга тегишли маълум функция.

(16) интеграл тенглама қўйилган BSI масалага эквивалент бўлиб, унга мос бир жинсли интеграл тенглама $\{(9),(10)\}$ масалага эквивалентдир. Охирги масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (16) интеграл тенгламага мос бир жинсли тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда, Фредгольм альтернативасига асосан [3.256], интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона. 2-теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Т.: “MUMTOZ SO’Z”, 2014.
2. Азларов Т., Мансуров Х.. Математик анализ. – Т.: “Ўқитувчи”, 1994.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. – T.: “Yangiyul polygraph service”, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).