ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2018
июнь

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

МУНДАРИЖА

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 51+004.13+517.56

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ ЗНАЧЕНИЙ ВЫРАЖЕНИЙ

А.Юсупова, М.Рахмонкулова

Аннотация

Ушбу мақолада функция хоссаларидан фойдаланиб баъзи мисоллар ечимларини топиш методикаси келтирилган.

Аннотация

В данной статье приводится методика применения свойств функции для решения некоторых примеров.

Annotation

In this paper the methods of using function's properties for solution of some examples are given.

Таянч сўз ва иборалар: *баҳолаш усули, комбинацияланган ифодалар, функция қийматлар соҳасининг чегараланганлиги.*

Ключевые слова и выражения: *метод оценки, комбинированные выражения, ограниченность области допустимых значений функции.*

Keywords and expressions: *method of evaluation, combined expressions, bounded area of the admissible values of the function.*

В эпоху научно-технического прогресса глубокое изучение математики становится актуальной. В процессе изучения математики широко используется решение примеров и задач. На начальном этапе обучения учителя обычно предлагают учащимся выполнять качественные задачи и упражнения, которые помогают им изучить символику, правила написания и составления уравнений и другой описательный материал. На следующих этапах обучения ставится цель научить школьников применять на практике полученные знания, самостоятельно проводить математические вычисления. Уравнение или неравенство может содержать выражение нескольких видов, тригонометрические, степенные, логарифмические, многочлены и т.д. Такое уравнение или неравенство называют комбинированным. Иногда после замены неизвестной, задача приобретает стандартный вид. Если же никакая замена не помогает, то можно попробовать решить задачу, опираясь на специфические свойства функций: ограниченность, монотонность, чётность или нечётность, периодичность и т.п.

Очень часто при решении комбинированных уравнений и неравенств используется метод оценки. При этом оценить значение выражения или функции можно как алгебраическим способом, например, используя некоторые известные неравенства, так и исследуя функцию с помощью аппарата математического анализа.

Также можно использовать ограниченность области допустимых значений уравнений или неравенства, сводя задачу к проверке конечного числа возможных решений.

Если эти методы не помогают, можно попытаться использовать монотонность функции. Исследовать функцию на монотонность также можно с помощью производной или с помощью некоторых известных неравенств.

Чётность или нечётность функции применяется как при построении графиков функций, так и при исследовании расположения решений.

Сформулируем утверждения, позволяющие решать некоторые уравнения или неравенства.

1) Строго монотонная на всей области определения функция не может принимать одинаковых значений в разных точках.

Если $f(a)=f(b)$ и $f(x)$ монотонна, то $a=b$

А.Юсупова – *ФерГУ, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики.*

М.Рахмонкулова – *ФерГУ, студентка направления «Методика преподавания математики».*

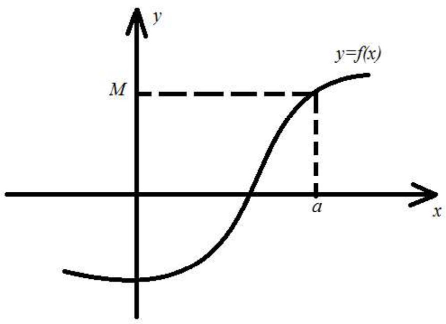

Рис. 1

2) Строго монотонная функция каждое свое значение принимает ровно один раз.

Если *f(a)=M* и функция *f(x)* монотонна, то в уравнении *f(x)=M* единственный корень *x=a*.

3) Графики возрастающей и убывающей функции могут иметь не более одной точки пересечения (рис.2)

Если функция *y=g(x)* убывает, а функция *y=f(x)* возрастает, то уравнение *g(x)=f(x)* может иметь не более одного корня (т.е. либо в уравнении нет корней, либо корень единственный).

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой *y=x*, поэтому такие графики могут пересекаться только в точках этой прямой.

Метод оценки связан с ограниченностью разных частей уравнения или неравенства и основан на следующих утверждениях:

–если все значения левой части не больше, а правой – не меньше некоторого числа, то левая часть не больше правой, при этом их равенство возможно только тогда, когда они одновременно равны этому числу;

–если одно выражение не больше некоторого числа, а второе – не больше некоторого другого числа, то их сумма не больше суммы этих двух чисел. Множество значений функций *y(x)* обозначим *E(y)*. Этот метод решения уравнений и неравенств основан на оценке значений выражений и (или) нахождении множества значений функций на промежутке.

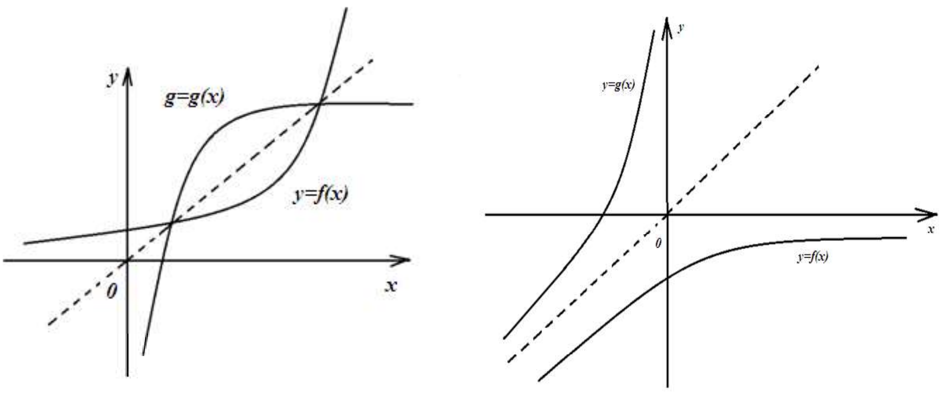

Рис.2

1. Решите неравенство:

$$\frac{\log_{25}(1-x)-\log_{12}(1-x)}{\log_{12}(x+1)-\log_{16}(x+1)} \geq \log_5 \frac{1}{4}$$

Решение. Преобразуем левую часть неравенства, применяя формулу перехода к другому основанию

МАТЕМАТИКА

$$\frac{\log_{25}(1-x)-\log_{12}(1-x)}{\log_{12}(x+1)-\log_{16}(x+1)}=\frac{\frac{\lg(1-x)}{\lg_{25}}-\frac{\lg(1-x)}{\lg_{12}}}{\frac{\lg(x+1)}{\lg_{12}}-\frac{\lg(x+1)}{\lg_{16}}}=$$

$$=\left(\frac{\lg(1-x)\left(\frac{1}{\lg_{25}}-\frac{1}{\lg_{12}}\right)}{\lg(1+x)\left(\frac{1}{\lg_{12}}-\frac{1}{\lg_{16}}\right)}\right)$$

Определим знак полученного выражения. Числа $\lg 16, \lg 25, \lg\frac{16}{12}$ - положительны, число $\lg\frac{12}{25}$ - отрицательно. При $-1<x<0$ множители $\lg(1+x)<0$ и $\lg(1-x)>0$, а при $0<x<1$ множители $\lg(x+1)>0$ и $\lg(1-x)<0$. На область допустимых значений левая часть неравенства положительна, а правая часть $\lg\frac{1}{4}$ - отрицательна. Значит, множество решений неравенства совпадает с областью допустимых значений. Найдём множество допустимых значений исходного неравенства, которое совпадает с множеством допустимых значений преобразованного.

$$\begin{cases}1-x>0,\\ x+1>0,\\ x+1\neq 1\end{cases}\quad \begin{cases}x<1\\ x\neq 0\\ x>-1\end{cases}\quad (-1;0)\cup(0;1)$$

Ответ: $(-1;0)\cup(0;1)$

2. Решите уравнения

$$\sqrt{7x^2+2\sqrt{7}\sin(\pi y)\cos(\pi x)+1}+$$
$$+\sqrt{14x^2+4y^2+z^2+2\sqrt{7}x+12y-4z+13}=0$$

Решение: Сумма неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из них равно нулю.

$$\begin{cases}7x^2+2\sqrt{7}x\cdot\sin(\pi y)\cos(\pi z)+1=0\\ 14x^2+4y^2+z^2+2\sqrt{7}x+12y-4z+13=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{7}x+\sin(\pi y)\cos(\pi z)^2+1-\sin^2(\pi y)\cos^2(\pi z)=0,\\ 4y^2+2y\cdot 2\cdot 3+9+z^2-2\cdot 2z+4+14x^2+2\sqrt{7}x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2y+3)^2+(z-2)^2+14x^2+2\sqrt{7}x=0\\ \left(\sqrt{7}x+\sin(\pi y)\cos\pi z\right)^2+1-\sin^2(\pi y)\cos^2(\pi z)=0\end{cases}\qquad (1)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1).

$$\left(\sqrt{7}x+\sin(\pi y)\cos(\pi z)\right)^2\geq 0$$

$$\sin^2(\pi y)\leq 1$$

$$\cos^2\pi z\leq 1,$$

значит

$$1-\sin^2 \pi y \cos^2 \pi z \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{7}x+\sin \pi y \cdot \cos \pi z = 0 \\ 1-\sin^2(\pi y)\cdot\cos^2(\pi z)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая, которые получаются при решении уравнения $\sin^2(\pi y)\cdot\cos^2(\pi z)=1$

1) $\sin(\pi y)\cdot\cos(\pi z)=-1 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{7}}$. Подставим $x=\frac{1}{\sqrt{7}}$ во второе уравнение системы (1). Полученное уравнение

$$4+(2y+3)^2+(z-2)^2=0$$

$(2y+3)^2+(z-2)^2=-4$ не имеет решений.

2) $\sin(\pi y)\cos(\pi z)=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{7}}$

Из второго уравнения системы (1) получим, $0+(2y+3)^2+(z-2)^2=0$,

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

Проверим, выполняются ли условия 2)

$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\cos 2\pi=1$, поэтому $x=-\frac{1}{\sqrt{7}};\quad y=-\frac{3}{2};\quad z=2$ - решение исходного уравнения.

Ответ: $x=-\frac{1}{\sqrt{7}};\quad y=-\frac{3}{2};\quad z=2$

Решите уравнение:

$$|x^2-2x|+\sqrt{x^3-3x^2+2x}=\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)-1$$

Решение. Оценим левую часть уравнения:

$$|x^2-2x|\geq 0 \qquad \sqrt{x^3-3x^2+2x}\geq 0$$

$$\sqrt{x^3-3x^2+2x}+|x^2-2x|\geq 0,$$

причём равенство нулю возможно, только если

$$|x^2-2x|=0 \qquad \sqrt{x^3-3x^2+2x}=0$$

одновременно.Оценим правую часть уравнения

$$-1\leq\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)\leq 1$$

$$-2\leq\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)-1\leq 0\cdot$$

Видим, что левая часть уравнения не отрицательна, а правая – не положительна.

Равенство возможно только в том случае, если они равны нулю. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^2-2x|=0 \\ \sqrt{x^3-3x^2+2x}=0 \\ \sin\left(\dfrac{17\pi}{2}+x-2\right)-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2=0 \\ x^3-3x^2+2x=0 \\ \sin\left(\dfrac{17\pi}{2}+x-2\right)=1 \end{cases}$$

Заметим, что нам нужно найти общие корни трёх уравнений системы. Для этого достаточно решить одно из них, и подставить его корни в другие уравнения.

$$x^2-2=0, \quad x(x-2)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=2$$

Подставив число 0 и 2 во второе уравнение системы, выясним, что они являются корнями второго уравнения системы. Проверим, являются ли они корнями третьего уравнения системы.

При

$$x=0 \quad \sin\left(\frac{17\pi}{2}+2-2\right)=\sin\frac{17\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

значит, *x*=2 корень исходного уравнения. Ответ: *x*=2.

Литература:

1. Юсупова А.К., Қосимова Д. Математика таълимида ўқувчилар йўл қўйган хатоларни тўғрилаш ва йўл қўйилиши мумкин бўлган хатоликлар олдини олиш. // “Глобаллашув шароитида фан ва таълимнинг ривожланиш тенденциялари” мавзусидаги Республика илмий-амалий интернет-конференция материаллари. – Фарғона, 2016.

(Рецензент: А.Ўринов, доктор физико-математических наук, профессор).