O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU ILMIY XABARLAR-

1995-yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2023

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FIZIKA-TEXNIKA

UDK: 518.1 **DOI: 10.56292/SJFSU/vol29_iss2/a128**

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MAPLE USING THE RUNGE-KUTTA METHOD.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В MAPLE МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТЫ.

MAPLE DASTURIDA DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHIMINI RUNGE-KUTTA USULIDAN FOYDALANIB TOPISH.

Otaqulov Oybek Xamdamovich[1], Nasriddinov Otadavlat Usubjonovich[2], Isomiddinova Odilaxon Sultonmurodovna[3]

[1]**Otaqulov Oybek Xamdamovich**	– Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Farg‘ona filiali, dotsent
[2]**Nasriddinov Otadavlat Usubjonovich**	– Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Farg‘ona filiali, katta o‘qituvchi
[3]**Isomiddinova Odilaxon Sultonmurodovna**	– Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Farg‘ona filiali, magistr

Annotatsiya

Ko‘pchilik fizik jarayonlar, tabiatshunoslik, texnikaning ko‘pgina masalalari qaralayotgan hodisa yoki jarayonni tavsiflaydigan noma’lum funksiyani topishga keltiriladi. Bunday amaliy masalalarni hal etishda jadval shaklida yoki murakkab analitik ifoda shaklida berilgan funksiyaning turli tartibli hosilalarining qiymatlarini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Bunday hollarda differensial hisob usullarini tatbiq etishning yo iloji bo‘lmaydi, yoki bu juda qiyin bo‘ladi. Shuning uchun ularga taqribiy sonli usullar qo‘llaniladi. Bu usullardan biri Runge-Kutta usuli bo‘lib, o‘zining sermehnatligiga qaramasdan differensial tenglamalarni kompyuterda sonli yechishda keng qo‘llaniladi.

Mazkur maqolada boshlang‘ich shartlari bilan berilgan differensial tenglama(Koshi masalasi)ni sonli yechishning yuqori aniqlikdagi usullaridan biri hisoblangan Runge-Kutta usulida Maple dasturida yechib natija olingan.

Аннотация

Многие физические процессы, многие задачи естествознания, техники сводятся к нахождению неизвестной функции, описывающей рассматриваемое явление или процесс. При решении подобных практических задач необходимо вычислять значения производных разного порядка от заданной функции в виде таблицы или сложного аналитического выражения. В таких случаях применить дифференциальные методы расчета будет невозможно, или это будет очень затруднительно. Поэтому для них применяют приближенные численные методы. Одним из таких методов является метод Рунге-Кутты, который, несмотря на свою трудоемкость, широко применяется при численном решении дифференциальных уравнений на ЭВМ.

В данной статье результат решался методом Рунге-Кутты, считающимся одним из высокоточных методов численного решения дифференциального уравнения (задачи Коши), заданного с начальными условиями, в программе Maple.

Abstract

Many physical processes, many problems of natural science, technology are brought to find an unknown function that describes the phenomenon or process under consideration. When solving such practical problems, it is necessary to calculate the values of various order derivatives of the function given in the form of a table or a complex analytical expression. In such cases, it is either impossible to apply differential calculus methods, or it is very difficult. Therefore, approximate numerical methods are used for them. One of these methods is the Runge-Kutta method, which, despite its laboriousness, solves differential equations is widely used in computer numerical solutions.

In this article, the result was solved by the Runge-Kutta method, which is considered one of the high-accuracy methods of numerically solving the differential equation (Cauchy problem) given with the initial conditions, in the Maple program.

Kalit so‘zlar: *Maple dasturi, birinchi tartibli oddiy differensial tenglama, sonli usullar, taqribiy yechim, Koshi masalasi, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, chegaraviy shartlar, boshlang‘ich shart, Runge-Kutta koeffitsientlari.*

Ключевые слова: *Программа Maple, обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, численные методы, задача Коши, метод Рунге-Кутты, граничные условия, начальное условие, метод Эйлера, приближенное решение, коэффициенты Рунге-Кутты.*

Key words: *Maple program, first-order ordinary differential equation, numerical methods, Cauchy problem, Runge-Kutta method, boundary conditions, initial condition, Euler's method, approximate solution, Runge-Kutta coefficients.*

KIRISH

Har qanday rivojlangan jamiyatda, shu jumladan, O'zbekiston Respublikasida ham iqtisodiyotni yanada rivojlantirish, ta'lim jarayonini samaradorligini oshirish, umuman, barcha sohalarni takomillashtirishning asosiy shartlaridan biri zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalanishni joriy qilishdir.

Ko'pgina fizik jarayonlar, texnika masalalari differensial tenglamalarni yechishga keltiriladi. Agar bunday tenglamaning yechimini ma'lum boshlang'ich shart asosida topish talab qilinsa,hatto u eng sodda differensial tenglama bo'lsa ham yechimni chekli sondagi matematik amallar yordamida topish, umuman, mumkin emas. Bu narsa differensial tenglamalarni taqribiy yechishning turli sonli usullarining yaratilishiga olib keldi [1]. Ma'lumki, differensial tenglamalarni matematika fanlarida o'rgatiladi. O'quv jarayonida differensial tenglamalarni sonli yechimini Maple dasturida topish o'quvchi-talabalarning o'quv jarayonida faol bo'lishiga, kompyuter savodxonligining oshishiga(dasturlardan foydalana olishiga), vaqtni tejashga imkon yaratadi.

Maple-simvolli va sonli hisoblashlarni tez va effektiv bajarish uchun mo'ljallangan hamda elektron hujjatlarni tayyorlash va grafik vizuallashtirish, interaktiv vositalarga ega bo'lgan kompyuter matematikasining yetakchi tizimlaridan biridir.
Maple tizimidan jahondagi 300 dan ortiq eng katta universitetlarda o'quv jarayonida foydalanilmoqda va murakkab fizik jarayonlarni, tizimlarni va qurilmalarni modellashda keng qo'llanilmoqda Maple yadrosidan Mathematika, MATLAB, Mathcad va boshqa tizimlar simvolli hisoblarni amalga oshirishda foydalanmoqdalar [2].

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Ko'plab sohalardagi jarayonlarning matematik modeli oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar nomi bilan yuritiladi. Eng ko'p tarqalgan Koshi masalasi bu boshlang'ich shart bilan berilgan masalalardir. Ana shu boshlang'ich shartlar asosida masalani yechish jarayoni osonroq bajariladi. Boshqa turdagi masalalar – chegaraviy masalalar (masalan, chekli shartlar yoki oraliq nuqtalarda shartlari berilgan masalalar) – maxsus uslublar yordamida yechiladi, xususan ularning ba'zilari unga ekvivalent bo'lgan boshlang'ich shartli masalalarga keltirib yechiladi.Bunday masalalarni yechish usullarining ikkita guruhi mavjud: Bir qadamli va ko'p qadamli usullar. Birinchi guruhga kiruvchi usullar funksiyaning keyingi nuqtadagi qiymatini topish uchun uning dastlab bitta nuqtadagi, ikkinchi guruhda esa bir nechta nuqtadagi qiymati berilishini talab qiladi. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar bilan berilgan Koshi masalalarini bir qadamli sonli usullardan foydalanib taqribiy yechishda bu bo'limlarda qo'llaniladigan uslublarni bilish zarur. Ular hisoblash usullarining asosiy bo'limlarida qo'llaniladigan elementar almashtirishlar va hisoblashlarning buyruqlaridan foydalanish imkonini beradi. Amalda ixtiyoriy matematik paket yordamida amalga oshirish mumkin bo'lgan "elementar" hisoblashlar va almashtirishlar zanjiri murakkab masalalarni ham yechish imkonini beradi (masalan, Koshi masalasi, chegaraviy masalalarni yechish). Oddiy differensial tenglamaning yagona yechimini topish uchun n ta qo'shimcha shartlar kiritish lozim bo'ladi Agar bu qo'shimcha shartlar bitta nuqtada berilsa, u holda bunday masala **Koshi masalasi** deb ataladi. Koshi masalasining qo'shimcha shartlari **boshlang'ich shartlar** deb ataladi. Agar qo'shimcha shartlar bittadan ortiq nuqtalarda berilsa, ya'ni erkli o'zgaruvchining har xil qiymatlarida berilsa, u holda bunday masala chegaraviy masala deb ataladi. Bunday masalaning qo'shimcha shartlari chegaraviy shartlar deb ataladi. Xususan, n = 1 bo'lganda gap faqat Koshi masalasi haqida ketadi. [3].

RUNGE-KUTTA USULI.

Bizga birinchi tartibli $y' = f(x, y)$ oddiy differensial tenglamani [$x_0, b]$ kesmada $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimning taqribiy qiymatini Runge-Kutta usuli bilan h qadam bilan topish muammosi qo'yilgan bo'lsin. Berilgan [$x_0, b]$ kesmani n ta teng bo'laklarga $h = \frac{b - x_0}{n}$ qadam bilan bo'lib,x ning $x_i = x_{i-1} + h$, i=0,1,2,3,…,n qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini topamiz. $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, i=0,1,2,3,…,n.

Bu yerda $\Delta y_i = \left(\dfrac{K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}}{6} \right)$ ga teng. Bu yerdagi Runge-Kutta koeffitsientlari quyidagicha aniqlanadi:

$$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i), \qquad K_3^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2^{(i)}}{2}),$$

$$K_2^{(i)} = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1^{(i)}}{2}), \qquad K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)}).$$ [4]

Misol . $y' = x^2 + xy + y^2 + 1$ tenglamani [0;1] oraliqda aniqlangan x_0=0, y_0=0 boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini Runge-Kutta usulida h=0,1 qadam bilan hisoblang.

Yechish: [0;1] oraliqni $n = \dfrac{b - x_0}{h} = \dfrac{1-0}{0.1} = 10$, ya'ni 10 ta bo'lakka ajratamiz. $x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$; $x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$; $x_3 = 0.3$; $x_4 = 0.4$; $x_5 = 0.5$; $x_6 = 0.6$; $x_7 = 0.7$; $x_8 = 0.8$; $x_9 = 0.9$; $x_{10} = 1.0$.

Ushbu tenglamani yechimi qiymatlarini Maple dasturida to'g'ridan-to'g'ri hisoblash dasturi quyidagicha:

M a p l e d a s t u r i

> restart;f:=(x,y)->x^2+x*y(x)+y(x)^2+1; $f := (x, y) \to x^2 + x\,y(x) + y(x)^2 + 1$

> dsoll:=diff(y(x),x)=f(x,y); $dsoll := \frac{d}{dx} y(x) = x^2 + x\,y(x) + y(x)^2 + 1$

> init1:=y(0)=0; $init1 := y(0) = 0$

> ans2:=dsolve({dsoll,init1},numeric,method=rkf45); $ans2 :=$ proc (x_rkf45) ... end proc

> ns2:=dsolve({dsoll,init1},numeric,method=classical[heunform],output=array([0.1,0.2,0.3, 0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1.0]),stepsize=0.1);

$$ans2 := \left[\begin{array}{c} [x, y(x)] \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.101500000000000021 \\ 0.2 & 0.209160002203515048 \\ 0.3 & 0.329939890792907920 \\ 0.4 & 0.472593801501335953 \\ 0.5 & 0.649293143846819242 \\ 0.6 & 0.878604945898420196 \\ 0.7 & 1.19161431674882866 \\ 0.8 & 1.64608013515918384 \\ 0.9 & 2.36428242649709120 \\ 1.0 & 3.65666061606488624 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Yuqoridagi natijalarga qarab aytish mumkinki, Runge-Kutta usulida kesmaning istalgan nuqtasida aniq yechimni olishimiz mumkin. Buning uchun boshlang'ich shart berilishi kifoya. Dsolve buyrug'ida differentsial tenglamaning (Koshi muammosi yoki chegaraviy masala) sonli yechimini topish uchun type=numeric buyrug'i belgilanadi. Keyin differensial tenglamani yechish buyrug'i dsolve(eq, vars, type=numeric, options) ko'rinishida bo'ladi, bu erda eq -tenglamalar, vars- noma'lum funksiyalar ro'yxati, optsiyalar - parametrlarni sonli integrallash usulini belgilash imkonini beruvchi parametrlar. Procopts-protsedura (protsedura, boshlang'ich, start, raqam va procvars) yordamida ODE tizimini belgilash uchun foydalaniladigan variantlar. output-Dsolve dan kerakli natijani belgilaydi. Stepsize-qadam o'lchamini kititish uchun ishlatiladi. Maple dasturida quyidagi usullar amalga oshiriladi: method=rkf45 - Runge-Kutta-Felberg usuli 4-5-tartib (sukut bo‘yicha o‘rnatiladi); method=dverk78 – Runge-Kutta usuli 7-8 tartibli; method=klassik – 3-tartib klassik Runge-Kutta usuli; method=gear va method=mgear bir bosqichli va ko‘p bosqichli Gear usullaridir.

XULOSA

Xulosa qilib aytsak, ko‘pchilik differensial tenglamalar turlarining aniq analitik yechimi topilmaydi. Bu holda differensial tenglamalarni yechimini kompyuterda sonli usullar bilan topish mumkin.

Bu usullar quyidagilar:

1.Eyler usuli boshlang‘ich shartlari bilan berilgan differensial tenglamani(Koshi masalasi) sonli yechishning eng sodda va birinchi tartibli aniqlikdagi usulidir

2.Runge-Kutta usuli yuqori aniqlikdagi usullardan biridir.

3.Yechimini darajali qatorlar yordamida topish.

Sonli usullarda yechimni topish jarayonida quyidagi natijalarga kelish mumkin: qo‘llanilgan bir qadamli usullar yetarlicha aniqlik uchun kam vaqt sarflaydi hamda bu usullar uchun yagona shart yetarli, qadamning qiymati yechimning aniqligi va tezligiga muhim ta’sir ko‘rsatadi, bir qadamli usullarda hisoblash jarayonida hisob qadamini o‘zgartirish mumkin bo‘ladi, Eyler usuliga ko‘ra Runge-Kutta usuli aniqroq natijalarni beradi. Runge-Kutta usulida sonli yechimni topish uchun Maple dasturida boshlang‘ich shartdan va berilgan qadamdan foydalanib kesma bo‘laklaridagi qiymatlarni kiritamiz. Bu argumentlardagi noma’lum funksiyaning qiymatlarini esa dastur hisoblab chiqarib beradi. Bu albatta,murakkab hisoblashlarni oldini oladi va vaqt sarfini kamaytiradi. Ta’lim jarayonida bu usuldan foydalanish maqsadga muvofiqdir, chunki dasturning imkoniyatlaridan foydalanish talabalar uchun ham qiziqarli bo‘ladi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. O‘rinov Q, Mirzakarimov E.M. Differensial tenglamalar Maple tizimida. “Farg‘ona” nashriyoti 2020.-264 bet (Differential equations in the Maple system. “Fergana” publishing house 2020.-264.)

2. Abdirashidov A. Abdurashidov A.A. Nishonov O‘.A. Kasimova F.U. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni bir qadamli sonli usullar yordamida yechish. Uslubiy ko‘rsatma. – Samarqand: SamDU nashri, 2018. – 56 bet. (Solving first-order ordinary differential equations using one-step numerical methods. Methodological instruction. - Samarkand: SamDU publication, 2018. - 56 pages.)

3. Imomov.A. Mapleda matematik masalalarni yechish.Uslubiy qo‘llanma. Namangan, NamDU, 2011,-84 bet.(Solving mathematical problems in Maple. Methodical guide. Namangan, NamDU, 2011, page-84.)