O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU ILMIY XABARLAR-

1995-yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2023

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FIZIKA-TEXNIKA

UDK 531. 075. 8 **DOI: 10.56292/SJFSU/vol29_iss2/a126**

QISMAN O‘ZGARUVCHILI DINAMIK SISTEMA YECHIMINING TURG‘UNLIGI

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

STABILITY SOLUTION OF DYNAMICAL SYSTEMS ON A PART OF THE VARIABLES

Mullajonov Rustamjon Vohobjonovich[1], Abdugapparova Shaxodat Noyibjonovna[2], Mirzaahmedova Jumagul Vohobjon qizi[3]

[1]**Mullajonov Rustamjon Vohobjonovich** – Andijon davlat universiteti, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

[2]**Abdugapparova Shaxodat Noyibjonovna** – Andijon davlat universiteti

[3]**Mirzaahmedova Jumagul Vohobjon qizi** – Andijon davlat universiteti tayanch doktoranti

Annotatsiya

Ushbu maqolada klassik mehanika va biofizikadagi chiziqsiz differensial tenglamalar bilan ifodalangan dinamik sistemalarning matematik modeli hamda ularning yangi modifikatsiyalari va transformatsiyalari ko‘rib chiqiladi. Tenglamalarning xossalari, yechimlarning xususiyatlari, yechimning statsionar muvozanatda bo‘lmagan va muvozanatda bo‘lgan holatlari o‘rganiladi.

Аннотация

В статье рассматриваются математические модели динамических систем, представленные нелинейными дифференциальными уравнениями классической механики и биофизики, а также их новые модификации и преобразования. Изучаются свойства уравнений, свойства решений, нестационарные равновесные и равновесные ситуации решения.

Abstract

The article deals with mathematical models of dynamic systems, represented by nonlinear differential equations of classical mechanics and biophysics, as well as their new modifications and transformations. The properties of equations, properties of solutions, non-stationary equilibrium and equilibrium situations of the solution are studied.

Kalit so‘zlar: *dinamik sistema, yechim turg‘unligi, modefikatsiya, transformatsiy, statsionar, differensial, klassik mehanika.*

Ключевые слова: *динамические системы; устойчивость решений, модификация, преобразование, стационарная, дифференциальная, классическая механика.*

Key words: *dynamical systems; stability of solution, modification, transformation, stationary, differential, classical mechanics.*

KIRISH

Texnologiya jadal suratda rivojlanib borayotgan hozirgi davrda dinamik sistemalar harakatining turg‘unligini o‘rganish dolzarb masala hisoblanadi. Dinamik sistemalar holatining harakat jarayonida vaqt bo‘yicha o‘zgarishini differensial tenglama bilan ifodalashimiz mumkin. Agar kuzatishlar yoki o‘lchashlar natijasi sistema parametrlari qiymatlarini bir qiymatli aniqlash imkonini bersa, bu dinamik sistemani deterministik dinamik sistema deyishimiz. Agar parametrlar va qo‘shimca ta’sirlarni ixtiyoriy tanlash mumkin bo‘lsa, u holda sistema boshqariluvchi sistemadir.

ADABIYOTLAR TAHLILI

XIX asr so‘nggida harakat turg‘unligi savollari umumiy jihatdan ko‘rilgan ishlar paydo bo‘ldi. 1877-1884 yy. E.DJ.Rausning manografiyasi chop etildi 1882-yil esa N.E.Jukovskiyning dissertatsiyasi chop etildi. Ularda mualliflar turli usullardan foydalanib, harakat turg‘unligining bir qator umumiy savollarini bayon etishgan. Bundan tashqari, Воротников В.И. o‘zining 1995-yilda chop etilgan “К теории устойчивости по отношению к части переменных” nomli kitobida dinamik sistemalarni ifodalovchi differensial tenglamalardagi o‘zgaruvchilarning o‘zaro munosabatlarining dinamik sistemalarning turg‘unligini tekshirishdagi ahamiyatini yoritib berdi. Зубов И.В. ning 2003-yilda nashr qilingan “Методы анализа динамики управляемых систем” kitobida esa dinamik sistemalarning boshqaruv usullari haqida yoritilgan bo‘lib unda ham dinamik sistema uchun differensial tenglamalar sistemasini tuzish asosiy masala hisoblanadi.

TADQIQOT METODOLOGIYASI

Maqolada Klassik mehanika va biofizikadagi chiziqsiz differensial tenglamalar bilan ifodalangan dinamik sistemalarning matematik modeli hamda ularning yangi modefikatsiyalari va transformatsiyalari ko‘rib chiqildi. Tenglamalarning xossalari, yechimlarning xususiyatlari, yechimning statsionar muvozanatda bo‘lmagan va muvozanatda bo‘lgan holatlari o‘rganildi.

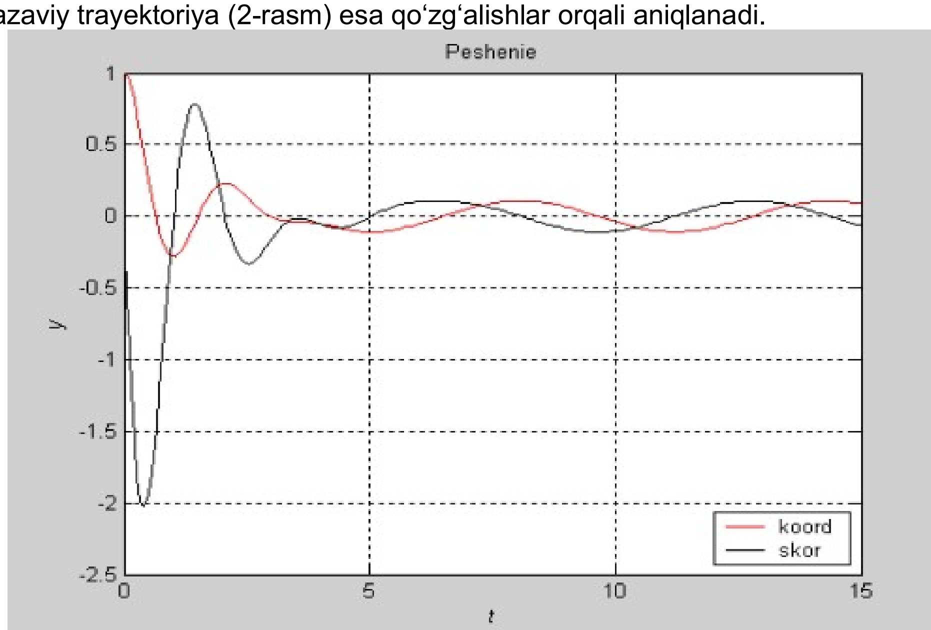
TAHLIL VA NATIJALAR

Chiziqsiz dinamik sistemalarni o‘rganishda ularning yechimlari haqida quyidagilarni bilish zarur: yechimlarda muvozanat holatlari borligini, ularning (muvozanat holatdagi yechimlarning) qaysi biri turg‘unligini, qanday shartlarda tebranish rejimi bo‘lishi mumkinligini [1,2]. Yechimning turg‘unlik xossasi masalaning qo‘yilishiga, umumlashgan koordinatalarni tanlashga va jarayonni tasvirlovchi tenglamaning yozilishiga bog‘liq. Ular o‘zgaruvchilarni almashtirganimizda saqlanmasligi mumkin, shuningdek, qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritganimizda fazoning o‘lchami o‘zgarishi mumkin, va yana berilgan sistemani kanonik almashtirishlar uchun birinchi integrallaridan foydalanishimiz mumkin.

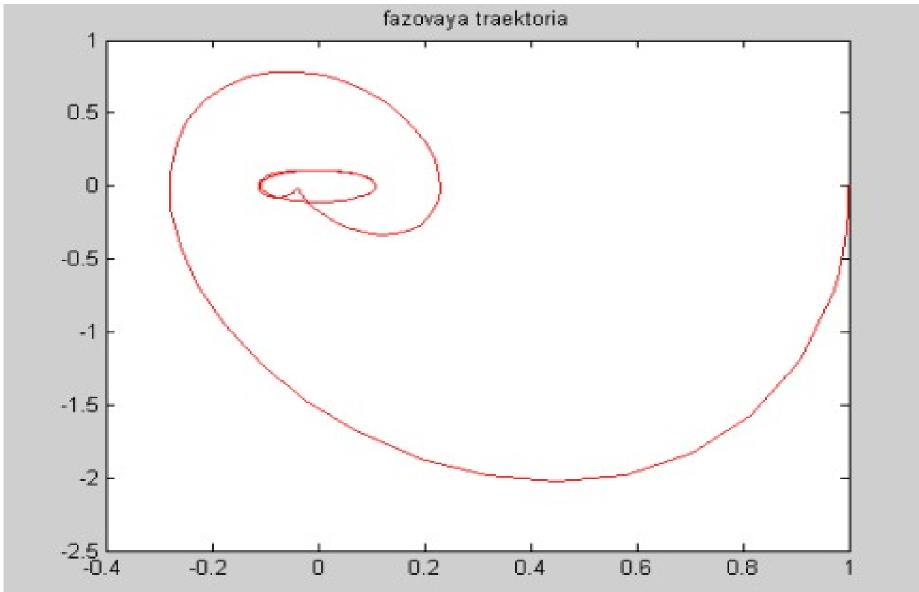
Ko‘p xollarda yechimlar holati xarakterini fazali portretlar bo‘yicha aniqlash mumkin, u holda trayektoriyalar to‘plami sinflarga bo‘linadi. Klassik mehanika masalasida fazali portretlarni qurishda potensial kuch bilan funksiya xossasidan foydalaniladi, u holda potensial energiya aniqlanadi. Mehanika masalalarida tenglama yechimining asosiy xossasini qo‘lga kiritish uchun yana birinchi integrallardan foydalaniladi (energiyalar, maydonlar, siklik), agar ular mavjud bo‘lsa. Bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan mehanik sistemalar dinamikasida klassik tenglamalar yaxshi o‘rganilgan: nuqtaning elastiklik kuchi harakatidagi garmonik ossilyatori yoki moddiy nuqtaning qarshilik kuchini hisobga olgan holdagi tebranishi, va yana moddiy nuqtaning qarshilik kuchlarini va ichki kuchlarini hisobga olgan holdagi tebranishining chiziqsiz tenglamalari

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -k^2 x - 2hy + f(x, y, u, t).$$

Birinchi holda davriy fuksiyaga ega bo‘lamiz, u holda muvozanat holati atrofida va Lyapunov bo‘yicha yechim turg‘unligida yopiq fazaviy trayektoriya aniqlanadi. Ikkinchi holda muvozanat holatning assimptotik turg‘unligiga ega bo‘lamiz. Davriy yoki tasodifiy xarakterdagi kichik qo‘zg‘alish mavjud bo‘lganda tabiiy tebranishning so‘nishi hosil bo‘ladi, yechimning holati (1-rasm) va fazaviy trayektoriya (2-rasm) esa qo‘zg‘alishlar orqali aniqlanadi.



1-rasm. Kichik davriy qo‘zg‘alishlardagi yechim.



2-rasm. Kichik davriy qo'zg'alishlardagi fazaviy portret.

Jarayon parametrlari bo'yicha chegaralarni hosil qilishimiz mumkin, shu jumladan chastotalarning rezonans holatlari uchun ham. Jarayonni boshqarish rejimi yechimning xususiyatini va xossasini o'zgartirishga imkon beradi.

Lyapunov ta'rifiga ko'ra harakat turg'un bo'ldi qachonki, agar boshlang'ich berilgan fazaviy o'zgaruvchilardagi kichik og'ishlar keyin ham kichik og'ishlarni keltirib chiqarsa. Orbital turg'unlik yoki qisman o'zgaruvchilar bo'yicha turg'unlik shuni ko'rsatadiki, fazaviy trayektoriya yoki uning qismfazoga mos keluvchi proyeksiyasi tayanch trayektoriyadan yetarlicha yaqinlikda bo'ladi, hech bo'lmaganda tasvirlovchi nuqta imkon boricha tarqalishi mumkin, vaqt o'tishi bilan bir biridan uzoqlashadi.

Oddiy misol: kuch ta'sirida bo'lmagan moddiy nuqta harakati. Nuqta harakatining o'zgarmas tezligi bo'yicha to'g'ri va fazaviy tekislik hosil bo'ladi:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = 0, \qquad \rightarrow \qquad x_2 = x_2^0, \qquad x_1 = x_2^0 t + x_1^0.$$

$(0,0)$ nuqta va x_1 o'qning barcha nuqtalari turg'unlik mavjud bo'lmagan nuqtalardir.

Boshlang'ich berilgandagi kichik og'ishlarga yaqin to'g'ri chiziqni olamiz

$$x_2 = x_2^0 + \varepsilon_2, \;\; x_1 = (x_2^0 + \varepsilon_2)t + x_1^0 + \varepsilon_1.$$

Bu to'g'ri chiziqdagi tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofa ortib boradi, hech bo'lmaganda bitta fazaviy o'zgaruvchi bo'yicha qisman turg'unlik qoladi.

Kichik davriy qo'zg'alishlarning mavjudligi bo'yicha quyidagi tenglamaga egamiz:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon_1 sint, \quad \dot{x}_2 = \varepsilon_2 cost,$$

$$x_2 = x_2^0 + \varepsilon_2 sint, \;\; x_1 = x_1^0 + x_2^0 t - \varepsilon_2 cost - \varepsilon_1 cost.$$

Markaziy gravitatsion maydondagi moddiy nuqtaning harakat tenglamasi uchun analogik xossa paydo bo'ladi. Taryektoriyalar yaqin, lekin harakat har xil tezlikda ro'y bermoqda.

Umumiy holda dinamikaning tenglamalar sistemasining normal formasi maxsus x^* nuqtaga ega qachonki, tenglamaning chap qismi nolga teng bo'lsa:

$$\frac{dx}{dy} = f(x), x \in R^n, \qquad f(x^*) = 0.$$

Dinamika masalalarida yechimning turg'unligi har xil tipdagi tenglamalar uchun har xil usullarda tekshiriladi. Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari konservativ mehanik sistemalarda fazaviy o'garuvchilar bo'yicha minimumlik shartidan kelib chiquvchi potensial energiyani ifodalovchi $\Pi(x)$ ko‘rinishidagi funksiyalar turg‘unligini baxolash imkonini beradi. Siklik integrallar mavjud bo‘lsa tenglamalar sistemasining tartibi pasayadi, qolgan umumlashgan koordinatalar uchun turg‘unlik baxolanadi.

Tenglamalarni kanonik sistema ko‘rinishiga keltirishda harakat tenglamasining o‘ng qismi bilan aniqlanuvchi $H(x)$ Gamilton funksiyasi uchun analogik shartni tekshirish mumkin.

Agar tenglama kanonik ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa va n birinchi integral mavjud bo‘lsa, u holda Arnold teoremasiga ko‘ra fazaviy trayektoriya $n-$ o‘lchovli halqada yotadi, sistema harakati esa shartli davriy bo‘ladi[2]. Umumiy holda normal shakldagi differensial tenglamalar sistemasi birinchi integralga ega bo‘lishi mumkin, qaysiki mos sirtlar kesishishidek integral ko‘pxillik aniqlanadi. Bu to‘plam sistemaning muvozanat rejimi yoki statsionar harakat deb ataladi.

O‘zgaruvchilarni almashtirganimizda hosil bo‘lgan yangi tenglama yechimining turg‘unlik shartlari va xossalarining mumkin bo‘lgan o‘zgarishlarini e’tiborga olish zarur. Kerakli funksiyani tanlashda o‘zaro bog‘liq almashtirishlarni bajarganimizda yangi o‘garuvchili tenglamaga ega bo‘lamiz, bu yerda o‘ng tomoni nolga teng, yangi o‘garuvchilar esa boshlang‘ich kanonik tenglamalar sistemasi uchun ixtiyoriy o‘zgarmaslar to‘plamini aniqlaydi. Shuning uchun, ixtiyoriy boshlang‘ich shartlarda ular o‘zgarmas bo‘lib qoladi, kichik boshlang‘ich og‘ishlar saqlangan holda.

Biofizika masalalarida dinamikaning matematik modellarining umumiyroq ko‘rinishi mavjud (masalan, Лотки, Вольтера, Базыкина, Новоселова modellari), fizik va kimyoviy jarayonlarda sistema parametrlarining o‘zgarishi chiziqli yoki chiziqsiz differensial tenglamalar bilan tavsiflanadi [2-5]. Chiziqsiz tenglamalar sistemasining o‘ng tomoni fazaviy o‘zgaruvchilarga bo‘g‘liq holda chiziqli va kvadratik qimlarga bo‘linishi mumkin

$$\frac{dx}{dt} = Ax + (x^*, Bx),$$

bu yerda *A* va *B* matritsalar elementlari doimiy deb qabul qilinadi. Fazaviy o‘zgaruvchilarning mumkin bo‘lgan qiymatlar sohasida tenglikning o‘ng tomoni nolga teng bo‘lsa, mumkin bo‘lgan muvozanat holati yoki tinch holati to‘plamiga ega bo‘lamiz.

O‘zaro energiya almashinuvchi biologik sistemalar yoki moddalarda hosil qilish mumkin bo‘lgan statsionar nomuvozanatlik holati va muvozanat holatini o‘rganish mumkin. Almashinish jarayoni qo‘zg‘alishlarni yoki stabillashtiruvchi ta’sirlarni keltirib chiqaradi. Ajratilgan yechimlarning turg‘unligini baxolash uchun o‘zgartirishlar yoki qo‘shimchalar kiritamiz.

Вольтер biofizikasining klassik modeli [5] quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad \frac{dy}{dt} = -cy + dxy.$$

Sistema ikkita statsionar yechimga ega. $x \neq 0, y \neq 0$ bo‘lgan holda boshlang‘ich shartga ko‘ra davriy tebranuvchi yopiq chiziq bilab o‘ralgan fazaviy tekislikda joylashgan maxsus nuqta hosil bo‘ladi. Yechimning xarakteriga ko‘ra qo‘zg‘alishlar va boshqaruvchi ta’sirlar o‘zgarishi mumkin.

Miqdorlarning chegaralarini hisobga olgan holda modelni o‘zgartirish quyidagini beradi

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy, \quad \frac{dy}{dt} = a_2 y - b_2 y^2 + c_2 xy.$$

Koordinatalar boshi “Noturg‘un markaz” turidagi maxsus hisoblanadi. Maxsus nuqtalarning yana uchta turi mavjud, ulardan ikkitasi o‘lja yoki yirtqichlar bo‘lmagan hollarda mos keladi. Uchinchi holda maxsus nuqtalar boshlang‘ich berilgan bo‘yicha “yirtqich-o‘lja” sistemasida ko‘rsatilgan fazaviy tekislikdagi davriy tebranuvchi yopiq chiziqda aniqlanadi.

Новоселов В.С. ning ishlarida hosil qilingan mushak qo‘zg‘alishi statistik modelining differensial tenglamasini quyidagicha yozish mumkin

$$\frac{dx}{dt} = Ax + (x^*, Bx) + f(x, u, t),$$

bu yerda qo‘zg‘alishlar boshqaruvchi parametrlar yoki $u(t)$ ga bog‘liq bo‘lishi mumkin.

Mushaklar qo‘zg‘alishi mushak tolalari membranasi sirtiga o‘zi harakatlanuvchi neyronlar tushganida mushaklarning kuchlanishi yoki qisqarishini anglatadi. Unga ko‘ra qalin mushak tolalari birikishi mumkin. Bu ferment reakiyasining faol markazini hosil qiladi. Gidrolizlovchi fermentlarning reaksiyasi natijasida kuchlanish energiyasida va mushaklarning qisqarish ishida o‘zgarish yuzaga keladi. Mushaklarning barcha strukturaviy elementlari statistik jihatdan bir xil hisoblanadi.

Hosil bo‘lgan chiziqsiz differensial tenglama mushaklar kuchlanishi fazasidagi statsionar rejimni tavsiflaydi, qachonki, mushaklarda statsionar muvozanatda bo‘lmagan kuchlanish mavjud bo‘lsa, va yana statsionar muvozanat holatidagi yechimni baxolash uchun sonli usullarni ham. Konsentratsiya o‘zgarishi ulanish markazidagi ferment reaksiyasining tezligini aniqlaydi. Tenglamalar sstemasi koeffitsientlari qiymatlari va boshlang‘ich shartning bog‘liqligidan mos o‘zgaruvchilar guruhi bo‘yicha tebranish rejimining turg‘un yoki noturg‘unligi namoyon bo‘ladi. Mushaklar qisqarishi ikki ko‘rinishga bo‘linadi: izometrik, bunda mushak uzunligini o‘zgartirmasdan kuchni rivojlantirganda, izotonik, bunda mushak kuchlanishi amalda o‘zgatirilmasdan mushak qisqaradi va qalinlashadi. Masalan, yukni ko‘tarib ish bajarganda qoidaga ko‘ra mushak avval izometrik keyin izotonik qisqaradi. Qachon izometrik qisqarish oddiyroq ko‘rinishga ega bo‘ladi. *B* matritsa uchun xarakterstik polinom quyidagi ko‘rinishda birinchi yaqinlashish bilan aniqlanadi:

$$|B - \lambda E| = (-\mu - \lambda)\lambda^3(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4).$$

a_i koeffitsientning musbat bo‘lishi polinom ildizlari manfiyligining zaruriy sharti hisoblanadi. Raus-Gurvits kriteriysini qo‘llab zaruriy shart hosil qilinadi. Tenglamalar sistemasi mavhum xos sonlarsiz uch o‘lchovli favoni to‘ldiruvchi butun muvozanat holat oilasiga ega. Agar bunda quyidagi shart bajarilsa:

$$a_0 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0, \quad a_4 > 0,$$

bunda har bir muvozanat holatidan sistemaning to‘ldiruvchi va unga assimptotik yaqinlashuvchi besh o‘lchovli qism fazo aniqlanadi.

XULOSA

Xulosa o‘rnida aytish mumkinki, tenglamalar sistemasining o‘ziga xosligi tartibini pasaytirish mumkin bo‘lgan fazaviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha chiziqli integralning mavjudligi hisoblanadi, va chiqarib tashlangandan keyin qolgan fazaviy o‘zgaruvchilar uchun soddalashtirilgan tenglamalar orqali turg‘unlikni o‘rganish imkonini beradi. Bu boshlang‘ich sistema uchun shartli turg‘unlik kriteriysini, va yana soddalashtirilga sistema va izometrik qisqartirish uchun turg‘unlik kriteriysini hosil qilishga imkon beradi.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Воротников В.И. К теории устойчивости по отношению к части переменных // Прикладная математика и механика. — Т. 59(4), — 1995. — С. 553—561.
2. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. М.: Физматлит, 2003. — 224 с.
3. Новоселов В.С. Статистическая динамика. СПб: СПбГУ, 2009. — 393 с.
4. Новоселов В.С., Королев В.С. Модель возбуждения мышцы // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». М.: ИПУ РАН, 2005, — с. 367—374.
5. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 472 с.