O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

4-2022

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

TILSHUNOSLIK

MATEMATIKA

FIZIKA – TEXNIKA

MATEMATIKA

UDK: 517.956.6 **DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss4/a39**

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ВЫРОЖДАЩИХОСЯ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FOURTH-ORDER EQUATIONS DEGENERATING ON THE WHOLE BOUNDARY OF THE DOMAIN

SOHA CHEGARASINING BARCHA QISMIDA BUZILADIGAN TO‘RTINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли [1], Уринов Ахмаджон Кушакович[2]

[1]**Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли** – магистрант, Ферганского государственного университета.

[2]**Уринов Ахмаджон Кушакович** − доктор физико математических наук, профессор, Ферганского государственного университета

Annotatsiya

Ushbu maqolada soha chegarasining barcha qismida buziladigan to‘rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalalar bayon qilingan va o‘rganilgan. Masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg‘unligi isbotlangan. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli orqali, oddiy differensial tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Bu spektral masala Grin funksiyasi yordamida simmetrik yadroli ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasiga ekvivalent keltirilgan. O‘rganilayotgan masalaning yechimi spektral masalaning xos funksiyalar sistemasiga nisbatan Furye qatorining yig‘indisi sifatida topilgan. Masala yechimining bahosi olingan, uning berilgan funksiyalarga doimiy bog‘liqligi isbotlangan.

Аннотация

В статье поставлены и исследованы краевые задачи для уравнений четвертого порядка вырождающихся на всей границе области. Доказаны существование, единственность и устойчивость решения задач. При этом, применением метода разделения переменных к изучаемой задаче, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Далее, построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Abstract

In the work boundary value problems have been formulated and investigated for a fourth-order equations degenerating on the whole boundary of the domain. The existence, uniqueness and stability of the solution of the problem have been proved. At the same time, by applying the method of separation of variables to the considered problem, a spectral problem for an ordinary differential equation has been obtained. Next, the Green's function of the spectral problem was constructed, with the help of which it is equivalently reduced to an the second kind Fredholm integral equation with a symmetric kernel. The solution of the considered problem has been written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. An estimate for solution the problem was obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Kalit so‘zlar: *buziladigan to‘rtinchi tartibli tenglama; chegaraviy masala; spektral masala; Grin funksiyasi; integral tenglama; yechimning mavjudligi; yagonaligi va turg‘unligi.*

Ключевые слова: *вырождающееся уравнение четвертого порядка, краевая задача, спектральная задача, функция Грина, интегральное уравнение, существование, единственность и устойчивость решения.*

Key words: *degenerate fourth order equation; initial-boundary value problem; spectral problem; Green's function; integral equation; existence; uniqueness and stability of the solution.*

I. Введение

Известно, что теория вырождающих дифференциальных уравнений в частных производных имеет многочисленные приложения в науке и технике [1], [2]. Например, радиальное колебание газа в бесконечной цилиндрической трубе описывается вырождающимся уравнением вида $u_{tt} = x^{-1}\left(xu_x\right)_x$, а малые колебания тяжелой нити, подвершенной за один конец, уравнением $u_{tt} = x^{-2}\left(x^2 u_x\right)_x$. Вырождающееся уравнение $u_{tt} = \left[\left(l^2 - x^2\right)u_x\right]_x$ возникает при изучении малых колебаний вращающейся струны длиною l , закрепленной одним своим концом на неподвижной опоре [3]; а изгиб пластинки переменной толщины с острым краем определяется уравнением четвертого порядка вида [4] $u_{tt} = x^{-\alpha/3}\left(x^{\alpha}u_{xx}\right)_{xx}$. Поэтому в настоящее время эта теория развивается быстрыми темпами.

В данной работе в четырехугольной области $\Omega = \left\{(x,t): 0 < x < 1; 0 < t < 1\right\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка

$$t^{a}(1-t)^{b}u_{t} + cu + \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx} = 0, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ - неизвестная функция, а a, b, α, β, c - заданные действительные числа, причем $0 \le a < 1$, $0 \le b < 1$, $c \ge 0$, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$.

II. Постановка задачи

Исследуем следующую краевую задачу для уравнения (1) в области Ω:

Задача A_d. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) u, u_x, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_x \in C(\overline{\Omega})$; $t^{a}(1-t)^{b}u_t$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx} \in C(\Omega)$;

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);

3) на границе области Ω выполняются следующие краевые условия:

$$u(0,t) = 0, \lim_{x\to 0} x^{\alpha}u_{xx}(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t) = 0, t \in [0,T]; \tag{2}$$

$$u(x,0) + du(x,1) = \varphi(x), x \in (0,1), \tag{3}$$

где d - заданные действительные числа, $d \ge 0$, а $\varphi(x)$ - заданная непрерывная функция, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$.

III. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

При формальном применении метода Фурье к поставленной задаче A_d возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]'' = \lambda v(x),\ 0 < x < 1, \tag{4}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &v(x),\ v'(x),\ x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x), \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]' \in C[0,1];\\ &v(0) = 0,\ v(1) = 0,\ \lim_{x\to 0} x^{\alpha}v''(x) = 0, \lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta}v''(x) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Легко показать, что задача $\left\{(4),(5)\right\}$ при $\lambda = 0$ самосопряжена [5].

Для того, чтобы найти промежуток параметра λ, при котором существуют нетривиальные решения задачи $\left\{(4),(5)\right\}$, умножим обе части уравнения (4) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям дважды к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (5), имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[v''(x)\right]^2 dx = \lambda\int_0^1 v^2(x)dx.$$

Отсюда, при $v(x) \not\equiv 0$ следует, что $\lambda \ge 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует, что $v''(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда $v(x) = C_1x + C_2$, $x \in (0,1)$, откуда, в силу условия $v(0) = 0,\ v(1) = 0$, получим $v(x) \equiv 0$, $0 \le x \le 1$. Следовательно, задача $\left\{(4),(5)\right\}$ имеет нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Если учесть это и самосопряженность задачи $\{(4),(5)\}$ при $\lambda=0$, то задача $\{(4),(5)\}$ имеет счетное число собственных значений $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<...<\lambda_k<...,\quad \lambda_k\to+\infty$ и соответствующие им собственные функции $v_1(x),v_2(x),v_3(x),...,v_k(x)...,$ образующие полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$, и что любая функция $g(x)\in L_2(0,1)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям [5].

Пусть $G(x,s)$ - функция Грина задачи $\{(4),(5)\}$. Она должна удовлетворить следующим условиям:

1) функция $G(x,s)$, $G_x(x,s)$, $x^\alpha(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)$ непрерывна для всех $x,s\in[0,1]$ иудовлетворяет граничным условиям $G(0,s)=0$, $G(1,s)=0$, $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha G_{xx}(x,s)=0$, $\lim\limits_{x\to1}(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)=0$ при $s\in(0,1)$;

2) в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$ существует непрерывная производная $\left[x^\alpha(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x$, а при $x=s$ имеет скачок 1, т.е.

$$\left[x^\alpha(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=s+0}-\left[x^\alpha(1-x)^\beta G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=s-0}=1;$$

3) в интервалах $[0,s)$ и $(s,1]$ функция $G(x,s)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению $MG(x,s)=0$.

Пользуясь общим решением уравнения $Mv=0$, нетрудно убедиться, что функция $G(x,s)$, обладающая этим условием, имеет вид

$$G(x,s)=\begin{cases}(s-1)\int\limits_0^x\frac{z(x-z)dx}{z^\alpha(1-z)^\beta}+x\int\limits_0^s\frac{(z-1)(s-z)dx}{z^\alpha(1-z)^\beta}+xs\int\limits_0^1\frac{(1-z)^2dx}{z^\alpha(1-z)^\beta},\ s>x;\\(x-1)\int\limits_0^s\frac{z(s-z)dx}{z^\alpha(1-z)^\beta}+s\int\limits_0^x\frac{(z-1)(x-z)dx}{z^\alpha(1-z)^\beta}+xs\int\limits_0^1\frac{(1-z)^2dx}{z^\alpha(1-z)^\beta},\ s<x.\end{cases}\qquad(6)$$

Тогда задача $\{(4),(5)\}$ эквивалентна интегральному уравнению с симметричным ядром $G(x,s)$ [6]:

$$v(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,s)v(s)ds.\qquad(7)$$

III. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть функция удовлетворяет условиям:* $h(x)$, $h'(x)$, $x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\in C[0,1]$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]''\in L_2(0,1)$; $h(0)=0,\ h(1)=0,\ \lim\limits_{x\to0}x^\alpha h''(x)=0,\ \lim\limits_{x\to1}(1-x)^\beta h''(x)=0$. *Тогда, ее можно разложить на отрезке* $[0,1]$ *в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций* $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *задачи* $\{(4),(5)\}$ *:*

$$h\left(x\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}h_k v_k\left(x\right), \qquad (8)$$

где $h_k=\int_0^1 h\left(x\right)v_k\left(x\right)dx$.

Доказательство. Справедливо равенство

$$h\left(x\right)=\int_0^1 G\left(x,s\right)\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta h''\left(s\right)\right]'' ds.$$

Действительно, в силу свойства функций $G\left(x,s\right)$ и $h\left(x\right)$, имеем

$$\int_0^1 G\left(x,s\right)\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta h''\left(s\right)\right]'' ds=\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta h''\left(s\right)\right]' G\left(x,s\right)\Big|_{s=0}^{s=1}-s^\alpha\left(1-s\right)^\beta h''\left(s\right)G_s\left(x,s\right)\Big|_{s=0}^{s=1}+$$

$$+s^\alpha\left(1-s\right)^\beta h'\left(s\right)G_{ss}\left(x,s\right)\Big|_{s=0}^{s=1}-h\left(s\right)\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta G_{ss}\left(x,s\right)\right]_s\Big|_{s=0}^{s=x-0}-h\left(s\right)\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta G_{ss}\left(x,s\right)\right]_s\Big|_{s=x+0}^{s=1}+$$

$$+\int_0^1 h\left(s\right)\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta G_{ss}\left(x,s\right)\right]_{ss} ds=h\left(x\right).$$

Следовательно, $h\left(x\right)$ - есть функция, представимая через ядро $G\left(x,s\right)$. Тогда, в силу эквивалентностизадачи $\left\{\left(4\right),\left(5\right)\right\}$ и интегрального уравнения (7), а такженеравенства

$$\int_0^1 G^2\left(x,s\right)ds\le C_3=const<+\infty$$

и теоремы Гильберта-Шмидта, эта функция на отрезке $\left[0,1\right]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\left\{v_k\left(x\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ [6]:

$$h\left(x\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}h_k v_k\left(x\right).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте* $\left[0,1\right]$*:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[v_k^{(\mu)}\left(x\right)\right]^2/\lambda_k\ ,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[x^\alpha\left(1-x\right)^\beta v_k''\left(x\right)\right]^{(\mu)}\right\}^2/\lambda_k^2\ ,\ \mu=\overline{0,1}. \qquad (9)$$

Доказательство. Так как ядро $G\left(x,s\right)$ интегрального уравнения (7) симметрично, положительно и непрерывно по $\left(x,s\right)$, то на основании теоремы Мерсера [6], это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G\left(x,s\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[v_k\left(x\right)v_k\left(s\right)\right]/\lambda_k$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что $\sum_{k=1}^{\infty}v_k^2(x)/\lambda_k=G(x,x)\le C_4=const<+\infty.$ т.е.первый ряд в (9) равномерно сходится на отрезке $\left[0,1\right]$.

В силу (7) и (4), справедливы равенства

$$v_k'\left(x\right)=\lambda_k\int_0^1 G_x\left(x,s\right)v_k\left(s\right)ds=\int_0^1 G_x\left(x,s\right)\left[s^\alpha\left(1-s\right)^\beta v_k''\left(s\right)\right]'' ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям два раза, а затем принимая во внимание условия (5), получим

$$v_k'\left(x\right)=\int_0^1 s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}G_{xss}\left(x,s\right)v_k''\left(s\right)ds.$$

Следовательно, справедливоравенство

$$\frac{v_k'\left(x\right)}{\sqrt{\lambda_k}}=\int_0^1 s^{\alpha/2}\left(1-s\right)^{\beta/2}G_{xss}\left(x,s\right)\left\{\frac{s^{\alpha/2}\left(1-s\right)^{\beta/2}v_k''\left(s\right)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}ds.$$

Далее, с помощью правила интегрирования по частям и равенств (4), (5), находим

$$\int_0^1\frac{s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}v_k''(s)v_l''(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}v_k''(s)v_l'(s)\Big|_0^1-\left[s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}v_k''(s)\right]'v_l\left(s\right)\Big|_0^1+$$

$$+\int_0^1\frac{\left[s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}v_k''(s)\right]''v_l\left(s\right)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds=\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}}\int_0^1 v_k\left(s\right)v_l\left(s\right)ds=\begin{cases}1, \text{ при } k=l,\\ 0, \text{ при } k\neq l.\end{cases}$$

Следовательно, $\left\{s^{\alpha/2}\left(1-s\right)^{\beta/2}v_k''\left(s\right)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система.

Из (10) и (11) следует, что $v_k'\left(x\right)/\sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции $s^{\alpha/2}\left(1-s\right)^{\beta/2}G_{xss}\left(x,s\right)$ по системе $\left\{s^{\alpha/2}\left(1-s\right)^{\beta/2}v_k''\left(s\right)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [6], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[v_k'\left(x\right)\right]^2}{\lambda_k}\leq\int_0^1 s^{\alpha}\left(1-s\right)^{\beta}\left[G_{xss}\left(x,s\right)\right]^2ds. \tag{12}$$

Принимая во внимание равенство (6), нетрудно убедиться, что интеграл в (12) равномерно ограничен. Поэтому ряд в (12), т.е. второй ряд в (9) сходится равномерно.

Аналогично доказывается сходимость рядов $\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\beta}v_k''\left(x\right)\right]^{(\mu)}\right\}^2/\lambda_k^2\ ,\mu=\overline{0,1}.$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если выполнены условия* $g\left(x\right),g'\left(x\right),x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\beta}g''\left(x\right)$, $\left[x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\beta}g''\left(x\right)\right]'$, $Mg\left(x\right)\in L_2\left[0,1\right]$; $g\left(0\right)=0$, $g\left(1\right)=0$, $\lim_{x\to0}x^{\alpha}g''\left(x\right)=0$, $\lim_{x\to0}\left(1-x\right)^{\beta}g''\left(x\right)=0$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k g_k^2\leq\int_0^1\left[x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\beta}g''\left(x\right)\right]^2dx, \tag{13}$$

где $g_k=\int_0^1 g(x)v_k(x)dx$.

Доказательство. В силу уравнения (4), справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2}g_k=\lambda_k^{1/2}\int_0^1 g\left(x\right)v_k\left(x\right)dx=\lambda_k^{-1/2}\int_0^1 g\left(x\right)\left[x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\beta}v_k''\left(x\right)\right]''dx.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям два раза и учитывая свойства функций $g\left(x\right)$ и $v_k\left(x\right)$, получим

$$\lambda_k^{1/2}g_k=\int_0^1\left\{x^{\alpha/2}\left(1-x\right)^{\beta/2}g''\left(x\right)\right\}\left\{\lambda_k^{-1/2}x^{\alpha/2}\left(1-x\right)^{\beta/2}v_k''\left(x\right)\right\}dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} g''(x)$ по ортонормированной системе функций $\left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} v_k''(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (13). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если выполнены условия* $g(x), g'(x), x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g''(x)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g''(x)\right]'$, $Mg(x)$, $\left[Mg(x)\right]' \in C[0,1], x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\left[Mg(x)\right]'' \in L_2[0,1]$; $g(0)=0$, $g(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} g''(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\beta} g''(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)^{\beta} g''(x)\right]''=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^{\alpha} g''(x)\right]''=0$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \le \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left\{\frac{d^4}{dx^4}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g''(x)\right]\right\}^2 dx, \tag{14}$$

где $g_k = \int_0^1 g(x) v_k(x)\,dx$.

Доказательство. В силу уравнения (4), справедливо равенство

$$\lambda_k^{3/2} g_k = \lambda_k^{3/2}\int_0^1 g(x) v_k(x)dx = \lambda_k^{1/2}\int_0^1 g(x)\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v_k''(x)\right]'' dx.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{3/2} g_k = \lambda_k^{1/2}\int_0^1 \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g''(x)\right]'' v_k(x)dx.$$

Заменяя в последнем интегрирования функцию $v_k(x)$ с $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v_k''(x)\right]'' / \lambda_k$, а затем применяя правило интегрируя по частям два раза к полученному интегралу, имеем

$$\lambda_k^{3/2} g_k = \int_0^1 \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g''(x)\right]^{(IV)} \left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v_k''(x)\right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{3/2} g_k$ - есть коэффициент Фурье функции $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g''(x)\right]^{(IV)}$ по ортонормированной системе функций $\left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} v_k''(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (14). Лемма 4 доказана.

IV.Существование, единственность и устойчивость решения задачи A_d

Нетрудно видеть, что формальное применение метода Фурье приводит к следующему представлению решения задачи A_d:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \tag{15}$$

где

$$u_k(t) = \frac{\varphi_k e^{\lambda_k\left[M - t^{1-a}(1-a)^{-1} F(b,1-a,2-a;t)\right]}}{e^{\lambda_k M} + d}, \tag{16}$$

$F(A,B,D;z)$ - гипергеометрическая функция Гаусса [7], $M=\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)\Gamma^{-1}(2-a-b)$, $\Gamma(z)$ -гамма функция Эйлера [7], а φ_k -коэффициент Фурье функция $\varphi(x)$, в системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Теорема 1. Если функции $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, то сумма ряда (15) определяет единственное решение задачи A_d.

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что ряд (15) и ряды, соответствующие функциям $u_x(x,t), x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x$, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$, а ряды, соответствующие функциям $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$, $t^a(1-t)^b u_t$, сходятся равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Сначала рассмотрим ряд(15). Так как $|u_k(t)|\le|\varphi_k|$, то справедливы неравенства

$$|u(x,t)|=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x)\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)||v_k(x)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k||v_k(x)|\cdot \qquad (17)$$

На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k||v_k(x)|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 3, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Отсюда и из (17) следует, что ряд (15) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Рассмотрим ряд, соответствующий функции $\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$.

Так как $|u_k(t)|\le|\varphi_k|$, то из (15) следует неравенство

$$\left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}\right]_{xx}\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k|\left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta v_k''(x)\right]''\right|.$$

Отсюда, в силу уравнения (4), на любом компакте $D(\subset\Omega)$ имеем

$$\left|\left[x^\alpha(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_{xx}\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k||\lambda_k v_k(x)|. \qquad (18)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k\varphi_k v_k(x)|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_k\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 4, сходятся равномерно по x на $[0,1]$.Тогда равномерно по x на $[0,1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (18) сходится абсолютно и равномерно на компакте D. Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Пусть, $\varphi(x)\equiv 0$. Тогда из (16) следует, что $u_k(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$, т.е. коэффициенты Фурье решение задачи $u(x,t)$ по системе $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ равны нулю. Так как система $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ полна в $L_2(0,1)$, то $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует единственность решения задачи A_d.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для решения задачи A_d справедлива следующая оценки:

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} \le \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}, \tag{19}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{D})} \le C_5 \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}, \tag{20}$$

где $\|u(x,t)\|_{C(\bar{D})} = \max\limits_{C(\bar{D})}|u(x,t)|$, $\|f''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int\limits_0^1 \left[r(x) f''(x)\right]^2 dx\right]^{1/2}$, $r(x) = x^\alpha (1-x)^\beta$.

Доказательство. Так как $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система, то из (15), учитывая $|u_k(t)| \le |\varphi_k|$, получим следующее неравенство:

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 = \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx = \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x) \sum_{l=1}^{+\infty} u_l(t) v_l(x)\,dx = \sum_{k,l=1}^{+\infty} u_k(t) u_l(t) \int\limits_0^1 v_k(x) v_l(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \int\limits_0^1 v_k^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \le \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k|^2 \le \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Следовательно, справедливо неравенство (19).

Так как $|u_k(t)| \le |\varphi_k|$, то справедливы неравенства

$$|u(x,t)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x)\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(t) v_k(x)| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| |v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le$$

$$\le \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} \le \left[G(x,x) \int\limits_0^1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta \varphi''(x)\right]^2 dx\right]^{1/2} \le C_5 \|\varphi''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}.$$

Отсюда, следует неравенство (20). Теорема 2 доказана.

Аналогично исследуется задача A_d и в случае одной из следующей групп условий:

1) $u(0,t)=0,\ u_x(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ u_x(1,t)=0,\ t\in[0,T]$;

2) $u(0,t)=0, u_x(0,t)=0, u(1,t)=0, \lim\limits_{x\to 1}(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)=0,\ t\in[0,T]$.

3) $u(0,t)=0, u_x(0,t)=0, u_x(1,t)=0, \lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x=0,\ t\in[0,T]$.

4) $u(0,t)=0, u_x(0,t)=0, \lim\limits_{x\to 1}(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)=0, \lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x=0,\ t\in[0,T]$.

5) $u(0,t)=0, \lim\limits_{x\to 0}x^\alpha u_{xx}(x,t)=0, u(1,t)=0, u_x(1,t)=0,\ t\in[0,T]$.

6) $u(0,t)=0, \lim\limits_{x\to 0}x^\alpha u_{xx}(x,t)=0, u_x(1,t)=0, \lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)^\beta u_{xx}(x,t)\right]_x=0,\ t\in[0,T]$.

7) $u_x(0,t)=0, \lim\limits_{x\to 0}\left[x^\alpha u_{xx}(x,t)\right]_x=0, u(1,t)=0, u_x(1,t)=0,\ \ t\in[0,T]$.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - Москва: Наука. 1966. 724 с.

2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. - Москва: Физматлит. 1962. 768 с.

3.Маховер. В. Е. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем. - Уч. зап. ЛГП им. Герцена, N 17, вып.2, 1957, стр.28-39.

4.Маховер. В. Е. О спектре собственных частот пластинки с острым краем. -Уч. зап. ЛГП им. Герцена. Т.197, 1958, стр. 113--118.

5.Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - Москва: Наука, 1969. 528 с.

6.Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям.- Москва: Физматлит, 1959. 232 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. -Москва: Наука, 1965. -296 с.