O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

4-2022

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

TILSHUNOSLIK

MATEMATIKA

FIZIKA – TEXNIKA

MATEMATIKA

UDK: 517.588 DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss4/a38

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФУНКЦИИ $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$

$F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$ GIPERGEOMETRIK FUNKSIYA UCHUN INTEGRAL KO'RINISHLAR VA BU FUNKSIYANI QANOATLANTIRUVCHI GIPERGEOMETRIK TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASI

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATION OF HYPERGEOMETRIC TYPE IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE FOURTH ORDER FOR A FUNCTION $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$

Хасанов Анвар[1], Жалилов Иномжон[2]

[1]Хасанов Анвар − доктор физ.-мат. наук, профессор Институт математики, Ташкент, Узбекистан, Институт механики и сейсмостойкости сооружений, Ташкент, Узбекистан, Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, исследователь

[2]Жалилов Иномжон − Ферганский гос. университет, Фергана, Узбекистан,

Annotatsiya

Ushbu maqolada ikki o'zgaruvchili, to'rtinchi tartibli $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$ Kampe de Feriyet funksiyasining integral ko'rinishlari va bu funksiya qanoatlantiruvchi xususiy hosilali to'rtinchi tartibli differensial tenglama sistemasi tuzilgan.

Аннотация

В этой статье изучаются свойства функции Кампе де Ферием от двух аргументов четвертого порядка $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$. Доказаны интегральные представления и система дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа, которую удовлетворяет указанная функция.

Abstract

This article studies the properties of the Kampe de Feriet function $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$ of two fourth-order arguments. Integral representations and a system of differential equations in partial derivatives of hypergeometric type, which is satisfied by the indicated function, are proved.

Kalit so'zlar: *Ko'p o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalar, integral ko'rinishlar, gipergeometrik tipdagi sistemalar.*
Ключевые слова: *Гипергеометрические функции многих переменных, интегральные представления, система уравнение гипергеометрического типа.*
Key words: *Hypergeometric functions of several variables, integral representations, system of equations of hypergeometric type.*

Введение

Гипергеометрическая функция - обобщение геометрической прогрессии, обладает множеством замечательных свойств, благодаря которым она привлекала внимание математиков в течении по крайней мере двух веков. Изучение этой функции привело Гаусса (Johann Carl Friedrich Gauss) к исследованию вопроса сходимости рядов, Римана (Georg Friedrich Bernhard Riemann) – к задаче об аналитическом продолжении и изучению дифференциальных уравнений с особыми точками.

Название "гипергеометрический" этому ряду дал Валлис (John Wallis) в 1655 году. Позже его изучали Эйлер (Leonard Euler) и Куммер (Ernst Eduard Kummer). Однако, до работ Гаусса это ряд нельзя было называть функцией в современном понимании этого слова. Гаусс доказал сходимость гипергеометрического ряда и следовательно, существование гипергеометрической функции.

Тем не менее, проблемы оставались и после работ Гаусса. Легко понять, что гипергеометрический ряд сходится лишь в единичном круге на комплексной плоскости, в то время как, гипергеометрическая функция может быть аналитически продолжена и за границу этого круга. Проблема - построить аналитическое продолжение гипергеометрической функции на всю комплексную плоскость. Такое аналитическое продолжение можно сделать, изучив свойства решений дифференциального уравнения для гипергеометрической функции.

Большой интерес к теории гипергеометрических функций связан с тем, что решение многих прикладных задач, включая задачи теплопроводности и газовой динамики, электромагнитные колебания, квантовой механики и теория потенциала можно получить с помощью гипергеометрических (высших и специальных или трансцендентных) функций [1-7, 17, 18]. Такие функции часто называют специальными функциями математической физики.

Цель настоящей работы доказать некоторые свойства для наиболее общей гипергеометрической функции двух переменных $F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[x,y\right]$ четвертого порядка, то есть рассматривается функция из класса гипергеометрических функций Кампе де Ферiет двух переменных (см. [1, 19]):

$$F_{l:m;n}^{p:q;k}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k);\\(e_l):(f_m);(g_n);\end{matrix}x,y\right]=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod\limits_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod\limits_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod\limits_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s\,r!s!}x^r y^s,\quad (1.1)$$

область сходимости ряда (1.1) определяется следующим образом:

если $p+q<l+m+1,\ p+k<l+n+1,$ то $|x|<\infty,\ |y|<\infty,$

если же $p+q=l+m+1,\ p+k=l+n+1,$ то $|x|^{\frac{1}{p-l}}+|y|^{\frac{1}{p-l}}<1,$ при $p>l,$
и

$\max\{|x|,|y|\}<1,$ при $p\le l,$ (1.2)

где $\prod\limits_{j=1}^{p}(a_j)_{m+n}=(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}\cdots(a_p)_{m+n}$.

Отметим, что функции Римана и фундаментальные решения вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка выражаются с помощью гипергеометрических функций многих переменных (см. [2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21]). Поэтому при исследовании краевых задач для этих уравнений в частных производных нам необходимо изучить решение системы дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрических функций и найти явные линейно независимые решения (см. [10, 11, 12, 13]). Функция $F_{l:m;n}^{p:q;k}$ содержит большое количество функций типа Аппеля. Здесь мы выбираем функции $F_{0;3;3}^{2;2;2}$ определяемый следующим двойным рядом (см. [1, 19]):

$$\begin{aligned}&F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix}a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2;\\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\end{matrix}x,y\right]=\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n\,m!n!}x^m y^n,\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $a,b_1,b_2,c_1,c_2,e_1,e_2,f_1,f_2 \in \mathbb{C}$ постоянные числа, причем e_1,e_2,f_1,f_2 не являются отрицательными целыми числами а $(a)_r = a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1)$, $(a)_0 = 1$, $(a)_r = \Gamma(a+r)/\Gamma(a)$ обозначение Похгаммера (Leo Pochgammer), $\Gamma(a)$ - гамма функция Эйлера.

1. Интегральные представления гипергеометрической функции $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$

Гипергеометрические функции от двух переменных могут выражаться либо интегралами типа Эйлера, либо интегралами типа Лапласа или интегралами Меллина (H.J. Mellin). Такие интегральные представления могут быть найдены во многих случаях, но подынтегральная функция в большинстве случае содержит гипергеометрическую функцию или их произведения.

Естественно, список гипергеометрических функции от двух переменных слишком велико и здесь невозможно привести полный перечень интегральных представлений. Интегральные представления полезны для аналитического продолжения гипергеометрических функции от двух переменных, в теории их преобразования, а также для интегрирования гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема 1. Если выполняются условия $\beta_i,\ \gamma_i \neq Z_0 \equiv \{0,-1,-2,...\}$, $i=1,2,3.$ и $\mathrm{Re}\,\beta_1 > \mathrm{Re}\,b_1 > 0,$ то имеет место следующее интегральные представления

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)} \int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1} F_{0;2;3}^{2;1;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi, y\right] d\xi, \qquad (2.1)$$

$\mathrm{Re}\,\beta_1 > \mathrm{Re}\,b_1 > 0,$

где,

$$F_{0;2;3}^{2;1;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!} x^m y^n. \qquad (2.2)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1, покажем, что из правой части равенства (2.1), можно вывести левую часть, то есть функцию $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$.

В самом деле

$$\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1} F^{2;1;2}_{0;2;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi, y\right] d\xi =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}(x\xi)^m y^n d\xi =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n \int_0^1 \xi^{m+b_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1} d\xi =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n B(m+b_1;\beta_1-b_1) =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n \frac{\Gamma(m+b_1)\cdot\Gamma(\beta_1-b_1)}{\Gamma(\beta_1+m)} =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n \frac{\Gamma(b_1)(b_1)_m\cdot\Gamma(\beta_1-b_1)}{\Gamma(\beta_1)(\beta_1)_m} =$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n \frac{(b_1)_m}{(\beta_1)_m} =$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n = F^{2;2;2}_{0;3;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x, y\right].$$

При доказательстве была использована определение Бета функции Эйлера [1,6,19]

$$B(a,b)=\int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1} d\xi,\ a,b>0. \tag{2.3}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если выполняются условия $\beta_i,\ \gamma_i \neq Z_0 \equiv \{0,-1,-2,...\},\ i=1,2,3.$ и $\operatorname{Re}\beta_1 > \operatorname{Re} b_1 > 0, \operatorname{Re}\beta_2 > \operatorname{Re} b_2 > 0,$ то имеет место следующее интегральные представления

$$F^{2;2;2}_{0;3;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x, y\right] = \frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}(1-\eta)^{\beta_2-b_2-1} F^{2;0;2}_{0;1;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & -; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi\eta, y\right] d\xi d\eta, \tag{2.4}$$

$\operatorname{Re}\beta_1 > \operatorname{Re} b_1 > 0, \operatorname{Re}\beta_2 > \operatorname{Re} b_2 > 0,$

где,

$$F^{2;0;2}_{0;1;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x, y\right] = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n. \tag{2.5}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 2, покажем, что из правой части равенства (2.4), можно вывести левую часть, то есть функцию $F^{2;2;2}_{0;3;3}[x,y]$. В самом деле

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}(1-\eta)^{\beta_2-b_2-1} F^{2;0;2}_{0;1;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: -; & c_1,c_2; \\ -:\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\end{matrix} x\xi\eta, y\right]d\xi d\eta =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}(1-\eta)^{\beta_2-b_2-1}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}(x\xi)^m\eta^m y^n d\xi d\eta =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\times$$

$$\times\int_0^1 \xi^{m+b_1-1}(1-\xi)^{\beta_1-b_1-1}d\xi\int_0^1\eta^{m+b_2-1}(1-\eta)^{\beta_2-b_2-1}d\eta =$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n$$

$$\times B(m+b_1;\beta_1-b_1)B(m+b_2;\beta_2-b_2)=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\times$$

$$\times\frac{\Gamma(m+b_1)\Gamma(\beta_1-b_1)}{\Gamma(m+\beta_1)}\cdot\frac{\Gamma(m+b_2)\Gamma(\beta_2-b_2)}{\Gamma(m+\beta_2)}=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b_1)\cdot(b_1)_m\cdot\Gamma(\beta_1-b_1)}{\Gamma(\beta_1)(\beta_1)_m}\frac{\Gamma(b_2)\cdot(b_2)_m\cdot\Gamma(\beta_2-b_2)}{\Gamma(\beta_2)\cdot(\beta_2)_m}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\cdot\frac{(b_1)_m(b_2)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m}x^m y^n=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n=$$

$$=F^{2;2;2}_{0;3;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\end{matrix} x, y\right].$$

При доказательстве была использована определение Бета функции Эйлера (2.3).

Теорема 3. Если выполняются условия $\beta_i,\ \gamma_i \neq Z_0 \equiv \{0,-1,-2,...\}$, $i=1,2,3.$ и $\operatorname{Re} b_1>0, \operatorname{Re} c_1>0,$ то имеет место следующее интегральные представления

$$F^{2;2;2}_{0;3;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\end{matrix} x, y\right]=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\times$$

$$\times\int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{c_1-1}F^{3;1;1}_{0;3;3}\left[\begin{matrix} a_1,a_2,b_1+c_1: & b_2; & c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;\end{matrix} x\xi, y(1-\xi)\right]d\xi, \qquad (2.6)$$

$\operatorname{Re} b_1>0, \operatorname{Re} c_1>0,$

здесь,

$$F_{0;3;3}^{3;1;1}\left[\begin{matrix} a_1,a_2,b_1+c_1: & b_2; & c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n. \tag{2.7}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 3, покажем, что из правой части равенства (2.6), можно вывести левую часть, то есть функцию $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$. В самом деле

$$\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{c_1-1}F_{0;3;3}^{3;1;1}\left[\begin{matrix} a_1,a_2,b_1+c_1: & b_2; & c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi, y(1-\xi)\right]d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\int_0^1 \xi^{b_1-1}(1-\xi)^{c_1-1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}(x\xi)^m y^n(1-\xi)^n d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\int_0^1 \xi^{m+b_1-1}(1-\xi)^{n+c_1-1}d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\cdot B(m+b_1;n+c_1)=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\frac{\Gamma(m+b_1)\Gamma(n+c_1)}{\Gamma(m+n+b_1+c_1)}=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\cdot\frac{\Gamma(b_1)(b_1)_m\Gamma(c_1)(c_1)_n}{\Gamma(b_1+c_1)(b_1+c_1)_{m+n}}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2)_m(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\cdot\frac{(b_1)_m(c_1)_n}{(b_1+c_1)_{m+n}}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n=F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right].$$

При доказательстве была использована определение Бета функции Эйлера (2.3).

Теорема 4. Если выполняются условия $\beta_i,\ \gamma_i\neq Z_0\equiv\{0,-1,-2,...\},\ i=1,2,3.$ и $\operatorname{Re} b_1>0,\operatorname{Re} b_2>0,\operatorname{Re} c_1>0,\operatorname{Re} c_2>0,$ то имеет место следующее интегральные представления

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{c_1-1}(1-\eta)^{c_2-1}\times \tag{2.8}$$

$$\times F_{0;3;3}^{4;0;0}\left[\begin{matrix} a_1,a_2,b_1+c_1,b_2+c_2: & -; & -; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi\eta, y(1-\xi)(1-\eta)\right]d\xi d\eta,$$

$\operatorname{Re} b_1>0,\operatorname{Re} b_2>0,\operatorname{Re} c_1>0,\operatorname{Re} c_2>0,$

где

$$F_{0;3;3}^{4;0;0}\left[\begin{matrix} a_1,a_2,b_1+c_1,b_2+c_2: & -; & -; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi\eta, y(1-\xi)(1-\eta)\right]=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2+c_2)_{m+n}}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n. \tag{2.9}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 4, покажем, что из правой части равенства (2.8), можно вывести левую часть, то есть функцию $F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[x,y\right]$ В самом деле

$$\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{c_1-1}(1-\eta)^{c_2-1}\times$$

$$\times F_{0;3;3}^{4;0;0}\left[\begin{matrix} a_1,a_2,b_1+c_1,b_2+c_2: & -; & -; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x\xi\eta, y(1-\xi)(1-\eta)\right]d\xi d\eta=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\int_0^1\int_0^1 \xi^{b_1-1}\eta^{b_2-1}(1-\xi)^{c_1-1}(1-\eta)^{c_2-1}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2+c_2)_{m+n}}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}(x\xi\eta)^m\, y^n(1-\xi)^n(1-\eta)^n\, d\xi d\eta=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2+c_2)_{m+n}}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\cdot\times$$

$$\times\int_0^1\xi^{m+b_1-1}(1-\xi)^{n+m+c_1-1}d\xi\int_0^1\eta^{m+b_2-1}(1-\eta)^{n+m+c_2-1}\,d\eta=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2+c_2)_{m+n}}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\times$$

$$\times B(m+b_1;n+c_1)B(m+b_2;n+c_2)=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2+c_2)_{m+n}}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\times$$

$$\times\frac{\Gamma(m+b_1)\Gamma(n+c_1)}{\Gamma(m+n+b_1+c_1)}\frac{\Gamma(m+b_2)\Gamma(n+c_2)}{\Gamma(m+n+b_2+c_2)}=$$

$$=\frac{\Gamma(b_1+c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(c_1)}\frac{\Gamma(b_2+c_2)}{\Gamma(b_2)\Gamma(c_2)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1+c_1)_{m+n}(b_2+c_2)_{m+n}}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\times$$

$$\times\frac{\Gamma(b_1)(b_1)_m\Gamma(c_1)(c_1)_n\Gamma(b_2)(b_2)_m\Gamma(c_2)(c_2)_n}{\Gamma(b_1+c_1)(b_1+c_1)_{m+n}\Gamma(b_2+c_2)(b_2+c_2)_{m+n}}=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_m(c_1)_n(c_2)_n}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m(\beta_3)_m(\gamma_1)_n(\gamma_2)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n=$$

$$=F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right].$$

Теорема 5. Если выполняются условия $\beta_i,\ \gamma_i\neq Z_0\equiv\{0,-1,-2,...\}$, $i=1,2,3.$ и $\operatorname{Re}\beta_1>\operatorname{Re}b_1>0,\operatorname{Re}\beta_2>\operatorname{Re}b_2>0,\operatorname{Re}\gamma_1>\operatorname{Re}c_1>0,\operatorname{Re}\gamma_2>\operatorname{Re}c_2>0,$ то имеет место следующее интегральные представления

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right]=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)\Gamma(\gamma_1-c_1)\Gamma(\gamma_2-c_2)}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \xi_1^{b_1-1}\xi_2^{b_2-1}\xi_3^{c_1-1}\xi_4^{c_2-1}(1-\xi_1)^{\beta_1-b_1-1}(1-\xi_2)^{\beta_2-b_2-1}(1-\xi_3)^{\gamma_1-c_1-1}(1-\xi_4)^{\gamma_2-c_2-1}\times \quad (2.10)$$

$$\times F_4(a_1,a_2;\beta_3,\gamma_3;x\xi_1\xi_2,y\xi_3\xi_4)\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4,$$

$$\operatorname{Re}\beta_1>\operatorname{Re}b_1>0,\operatorname{Re}\beta_2>\operatorname{Re}b_2>0,\operatorname{Re}\gamma_1>\operatorname{Re}c_1>0,\operatorname{Re}\gamma_2>\operatorname{Re}c_2>0.$$

где

$$F_4(a_1,a_2;c_1,c_1;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_n m!n!}x^m y^n. \quad (2.11)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 5, покажем, что из правой части равенства (2.10), можно вывести левую часть, то есть функцию $F_{0;3;3}^{2;2;2}[x,y]$ В самом деле

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)\Gamma(\gamma_1-c_1)\Gamma(\gamma_2-c_2)}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \xi_1^{b_1-1}\xi_2^{b_2-1}\xi_3^{c_1-1}\xi_4^{c_2-1}(1-\xi_1)^{\beta_1-b_1-1}(1-\xi_2)^{\beta_2-b_2-1}(1-\xi_3)^{\gamma_1-c_1-1}(1-\xi_4)^{\gamma_2-c_2-1}\times$$

$$\times F_4(a_1,a_2;\beta_3,\gamma_3;x\xi_1\xi_2,y\xi_3\xi_4)\,d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)\Gamma(\gamma_1-c_1)\Gamma(\gamma_2-c_2)}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \xi_1^{b_1-1}\xi_2^{b_2-1}\xi_3^{c_1-1}\xi_4^{c_2-1}(1-\xi_1)^{\beta_1-b_1-1}(1-\xi_2)^{\beta_2-b_2-1}(1-\xi_3)^{\gamma_1-c_1-1}(1-\xi_4)^{\gamma_2-c_2-1}{}_4\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}}{(\beta_3)_m(\gamma_3)_n m!n!}(x\xi_1\xi_2)^m(y\xi_3\xi_4)^n d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi=$$

$$=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)\Gamma(\beta_1-b_1)\Gamma(\beta_2-b_2)\Gamma(\gamma_1-c_1)\Gamma(\gamma_2-c_2)}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{m+n}}{(\beta_3)_m(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\int_0^1 \xi_1^{m+b_1-1}(1-\xi_1)^{\beta_1-b_1-1}d\xi_1\int_0^1 \xi_2^{m+b_2-1}(1-\xi_2)^{\beta_2-b_2-1}d\xi_2\times$$

$$\times\int_0^1 \xi_3^{n+c_1-1}(1-\xi_3)^{\gamma_1-c_1-1}d\xi_3\int_0^1 \xi_4^{n+c_2-1}(1-\xi_4)^{\gamma_2-c_2-1}d\xi_4=$$

Учитывая равенства

$$\int_0^1 \xi_1^{m+b_1-1}\left(1-\xi_1\right)^{\beta_1-b_1-1} d\xi_1 = B\left(m+b_1, \beta_1-b_1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(m+b_1\right)\Gamma\left(\beta_1-b_1\right)}{\Gamma\left(m+b_1+\beta_1-b_1\right)}=\frac{\Gamma\left(b_1\right)\left(b_1\right)_m\Gamma\left(\beta_1-b_1\right)}{\Gamma\left(\beta_1\right)\left(\beta_1\right)_m},$$
$$\int_0^1 \xi_2^{m+b_2-1}\left(1-\xi_2\right)^{\beta_2-b_2-1} d\xi_2 = B\left(m+b_2, \beta_2-b_2\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(m+b_2\right)\Gamma\left(\beta_2-b_2\right)}{\Gamma\left(m+b_2+\beta_2-b_2\right)}=\frac{\Gamma\left(b_2\right)\left(b_2\right)_m\Gamma\left(\beta_2-b_2\right)}{\Gamma\left(\beta_2\right)\left(\beta_2\right)_m},$$
$$\int_0^1 \xi_3^{n+c_1-1}\left(1-\xi_3\right)^{\gamma_1-c_1-1} d\xi_3 = B\left(n+c_1, \gamma_1-c_1\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(n+c_1\right)\Gamma\left(\gamma_1-c_1\right)}{\Gamma\left(n+c_1+\gamma_1-c_1\right)}=\frac{\Gamma\left(c_1\right)\left(c_1\right)_n\Gamma\left(\gamma_1-c_1\right)}{\Gamma\left(\gamma_1\right)\left(\gamma_1\right)_n},$$
$$\int_0^1 \xi_4^{n+c_2-1}\left(1-\xi_4\right)^{\gamma_2-c_2-1} d\xi_4 = B\left(n+c_2, \gamma_2-c_2\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(n+c_2\right)\Gamma\left(\gamma_2-c_2\right)}{\Gamma\left(n+c_2+\gamma_2-c_2\right)}=\frac{\Gamma\left(c_2\right)\left(c_2\right)_n\Gamma\left(\gamma_2-c_2\right)}{\Gamma\left(\gamma_2\right)\left(\gamma_2\right)_n}.$$

Мы имеем

$$\frac{\Gamma\left(\beta_1\right)\Gamma\left(\beta_2\right)\Gamma\left(\gamma_1\right)\Gamma\left(\gamma_2\right)}{\Gamma\left(b_1\right)\Gamma\left(b_2\right)\Gamma\left(c_1\right)\Gamma\left(c_2\right)\Gamma\left(\beta_1-b_1\right)\Gamma\left(\beta_2-b_2\right)\Gamma\left(\gamma_1-c_1\right)\Gamma\left(\gamma_2-c_2\right)}\times$$
$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}\left(a_2\right)_{m+n}}{(\beta_3)_m(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\frac{\Gamma\left(b_1\right)\left(b_1\right)_m\Gamma\left(\beta_1-b_1\right)}{\Gamma\left(\beta_1\right)\left(\beta_1\right)_m}\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(b_2\right)\left(b_2\right)_m\Gamma\left(\beta_2-b_2\right)}{\Gamma\left(\beta_2\right)\left(\beta_2\right)_m}\frac{\Gamma\left(c_1\right)\left(c_1\right)_n\Gamma\left(\gamma_1-c_1\right)}{\Gamma\left(\gamma_1\right)\left(\gamma_1\right)_n}\frac{\Gamma\left(c_2\right)\left(c_2\right)_n\Gamma\left(\gamma_2-c_2\right)}{\Gamma\left(\gamma_2\right)\left(\gamma_2\right)_n}=$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}\left(a_2\right)_{m+n}}{(\beta_3)_m(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n\frac{\left(b_1\right)_m}{\left(\beta_1\right)_m}\frac{\left(b_2\right)_m\left(c_1\right)_n\left(c_2\right)_n}{\left(\beta_2\right)_m\left(\gamma_1\right)_n\left(\gamma_2\right)_n}=$$
$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}\left(a_2\right)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_m\left(c_1\right)_n\left(c_2\right)_n}{\left(\beta_1\right)_m\left(\beta_2\right)_m(\beta_3)_m\left(\gamma_1\right)_n\left(\gamma_2\right)_n(\gamma_3)_n m!n!}x^m y^n=$$
$$=F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right].$$

При доказательстве была использована определение Бета функции Эйлера (2.3).

Теорема 6. Если выполняются условия $\beta_i,\ \gamma_i \neq Z_0 \equiv \{0,-1,-2,...\}$, $i=1,2,3.$ и $\operatorname{Re} a_1>0, \operatorname{Re} a_2>0,$ то имеет место следующее интегральные представления

$$F_{0;3;3}^{2;2;2}\left[\begin{matrix} a_1,a_2: & b_1,b_2; & c_1,c_2; \\ -: & \beta_1,\beta_2,\beta_3; & \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3; \end{matrix} x,y\right]=\frac{1}{\Gamma\left(a_1\right)\Gamma\left(a_2\right)}\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\xi-\eta}\xi^{a_1-1}\eta^{a_2-1}{}_2F_3\left(b_1,b_2;\beta_1,\beta_2,\beta_3;x\xi\eta\right){}_2F_3\left(c_1,c_2;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3;y\xi\eta\right)d\xi d\eta, \qquad (2.12)$$

$\operatorname{Re} a_1>0, \operatorname{Re} a_2>0,$

где ${}_2F_3\left(\sigma_1,\sigma_2;\rho_1,\rho_2,\rho_3;z\right)$ обобщенная гипергеометрическая функция [1,6],

$$ {}_2F_3\left(\sigma_1,\sigma_2;\rho_1,\rho_2,\rho_3;z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\sigma_1\right)_m\left(\sigma_2\right)_m}{(\rho_1)_m(\rho_2)_m(\rho_3)_m m!}z^m. \tag{2.13}$$

3.**Система дифференциальных уравнений для гипергеометрической функции Кампе де Ферие от двух аргументов четвёртого порядка.**

Горн [6,19] дал следующее общее определение: двойной степенной ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n}x^m y^n \tag{3.1}$$

является гипергеометрическим рядом, если два отношения

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{m,n}}=\frac{F\left(m,n\right)}{F'\left(m,n\right)},\ \text{ и }\ \frac{A_{m,n+1}}{A_{m,n}}=\frac{G\left(m,n\right)}{G'\left(m,n\right)}, \tag{3.2}$$

где $F,\, F',\, G,\, G'$ – многочлены от m и n, имеющие соответственно степени $p,\, p',\, q,\, q'$. При этом предполагается, что $F'\left(m,n\right)$ имеет множитель $m+1$, $G'\left(m,n\right)$ имеет множитель $n+1$. Предполагается, что $F\left(m,n\right),\, F'\left(m,n\right)$ и $G\left(m,n\right),\, G'\left(m,n\right)$ не имеют общих множителей. В этом случае говорят, что наибольшее из 4 чисел $p,\, p',\, q,\, q'$, называют порядком гипергеометрического ряда (3.1).

Тогда имеет место следующий система дифференциальных уравнений [6,19]

$$\begin{cases}\left[F'\left(\delta_x,\delta_y\right)x^{-1}-F\left(\delta_x,\delta_y\right)\right]u\left(x,y\right)=0,\\ \left[G'\left(\delta_x,\delta_y\right)y^{-1}-G\left(\delta_x,\delta_y\right)\right]u\left(x,y\right)=0,\end{cases} \tag{3.3}$$

где функция $u\left(x,y\right)=F_{l:m;n}^{p:q;k}\left[x,y\right]$ определяется формулой (1.1) и

$$\delta_x=x\frac{\partial}{\partial x},\ \ \delta_y=y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.4}$$

Из гипергеометрической функции (1.3) следует

$$A_{m,n}=\frac{\left(a_1\right)_{m+n}\left(a_2\right)_{m+n}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_m\left(c_1\right)_n\left(c_2\right)_n}{\left(\beta_1\right)_m\left(\beta_2\right)_m\left(\beta_3\right)_m\left(\gamma_1\right)_n\left(\gamma_2\right)_n\left(\gamma_3\right)_n m!n!}, \tag{3.5}$$

Тогда из обозначения (3.5), следуют

$$A_{m+1,n}=\frac{\left(a_1\right)_{m+n+1}\left(a_2\right)_{m+n+1}\left(b_1\right)_{m+1}\left(b_2\right)_{m+1}\left(c_1\right)_n\left(c_2\right)_n}{\left(\beta_1\right)_{m+1}\left(\beta_2\right)_{m+1}\left(\beta_3\right)_{m+1}\left(\gamma_1\right)_n\left(\gamma_2\right)_n\left(\gamma_3\right)_n\left(m+1\right)!n!}, \tag{3.6}$$

$$A_{m,n+1}=\frac{\left(a_1\right)_{m+n+1}\left(a_2\right)_{m+n+1}\left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_m\left(c_1\right)_{n+1}\left(c_2\right)_{n+1}}{\left(\beta_1\right)_m\left(\beta_2\right)_m\left(\beta_3\right)_m\left(\gamma_1\right)_{n+1}\left(\gamma_2\right)_{n+1}\left(\gamma_3\right)_{n+1} m!\left(n+1\right)!}, \tag{3.7}$$

Исходя из равенства (3.6) - (3.7) и учитывая (3.5), мы имеем

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{m,n}}=\frac{\left(a_1+m+n\right)\left(a_2+m+n\right)\left(b_1+m\right)\left(b_2+m\right)}{\left(\beta_1+m\right)\left(\beta_2+m\right)\left(\beta_3+m\right)\left(m+1\right)}=\frac{F\left(m,n\right)}{F'\left(m,n\right)}, \tag{3.8}$$

$$\frac{A_{m,n+1}}{A_{m,n}}=\frac{\left(a_1+m+n\right)\left(a_2+m+n\right)\left(c_1+n\right)\left(c_2+n\right)}{\left(\gamma_1+n\right)\left(\gamma_2+n\right)\left(\gamma_3+n\right)\left(n+1\right)}=\frac{G\left(m,n\right)}{G'\left(m,n\right)}. \tag{3.9}$$

При вычислении отношения (3.8) и (3.9) были использована тождества

$$\frac{\left(a\right)_{k+1}}{\left(a\right)_k}=\frac{\Gamma\left(a+k+1\right)}{\Gamma\left(a\right)}\frac{\Gamma\left(a\right)}{\Gamma\left(a+k\right)}=\frac{\Gamma\left(a+k+1\right)}{\Gamma\left(a+k\right)}=\frac{\left(a+k\right)\Gamma\left(a+k\right)}{\Gamma\left(a+k\right)}=a+k \tag{3.10}$$

Далее, на основе системы (3.3), в силу (3.8) - (3.9) мы определяем

$$\begin{cases} \left(\beta_1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\beta_2 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\beta_3 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+1\right)x^{-1}u(x,y) - \\ -\left(a_1 + x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2 + x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(b_1 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(b_2 + x\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,y) = 0, \\ \left(\gamma_1 + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\gamma_2 + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\gamma_3 + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial y}+1\right)y^{-1}u(x,y) - \\ -\left(a_1 + x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2 + x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(c_1 + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(c_2 + y\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

После некоторых вычислений, мы из (3.11) окончательно определяем систему дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{cases} x^3(1-x)u_{xxxx} - 2x^3yu_{xxxy} - x^2y^2u_{xxyy} + \\ +\left\{\beta_1+\beta_2+\beta_3+3-\left[(a_1+a_2+1)+(b_1+b_2+1)+4\right]x\right\}x^2u_{xxx} \\ -\left[(a_1+a_2+1)+2(b_1+b_2+1)+4\right]x^2yu_{xxy} - (b_1+b_2+1)xy^2u_{xyy} + \\ +\left[\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3+1-\begin{pmatrix} a_1a_2+a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+ \\ +a_2b_2+b_1b_2+3a_1+3a_2+3b_1+3b_2+7\end{pmatrix}x\right]xu_{xx} \\ -(a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2+2b_1b_2+a_1+a_2+3b_1+3b_2+3)xyu_{xy} - b_1b_2y^2u_{yy} + \\ +\left\{\beta_1\beta_2\beta_3 - \left[(a_1+1)(a_2+1)(b_1+b_2+1)+(a_1+a_2+1)b_1b_2\right]x\right\}u_x - \\ \qquad -(a_1+a_2+1)b_1b_2yu_y - a_1a_2b_1b_2u = 0, \\ y^3(1-y)u_{yyyy} - 2xy^3u_{xyyy} - x^2y^2u_{xxyy} + \\ \qquad +\left\{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+3-\left[(a_1+a_2+1)+(c_1+c_2+1)+4\right]y\right\}y^2u_{yyy} - \\ -\left[(a_1+a_2+1)+2(c_1+c_2+3)\right]xy^2u_{xyy} - (c_1+c_2+1)x^2yu_{xxy} \\ -(a_1c_1+a_1c_2+a_2c_1+a_2c_2+2c_1c_2+a_1+a_2+3c_1+3c_2+3)xyu_{xy} - c_1c_2x^2xu_{xx} + \\ +\left[\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+1-\begin{pmatrix} a_1a_2+a_1c_1+a_1c_2+a_2c_1+a_2c_2+ \\ +c_1c_2+3a_1+3a_2+3c_1+3c_2+7\end{pmatrix}y\right]yu_{yy} \\ +\left\{\gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \left[(a_1+1)(a_2+1)(c_1+c_2+1)+(a_1+a_2+1)c_1c_2\right]y\right\}u_y - \\ \qquad -(a_1+a_2+1)c_1c_2xu_x - a_1a_2c_1c_2u = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Литература

1. P. Appell and Kamper' de Fer'riets, Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite, Gauthier - Villars, Paris, 1926.
2. J. Barros-Neto and I.M. Gelfand, Fundamental solutions for the Tricomi operator,Duke Math. J. 98(3) (1999), 465-483.
3. J. Barros-Neto and I.M. Gelfand, Fundamental solutions for the Tricomi operator II, Duke Math. J. 111(3) (2002), 561-584.
4. J. Barros-Neto and I.M. Gelfand, Fundamental solutions for the Tricomi operator III, Duke Math. J. 128(1) (2005), 119-140.
5. L. Bers, Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, Wiley, New York, 1958.
6. A. Erde'lyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto and London, 1953.
7. F.I. Frankl, Selected Works in Gas Dynamics, Nauka, Moscow, 1973.

8. A.J. Fryant, Growth and complete sequences of generalized bi-axially symmetric potentials, J. Differential Equations 31(2) (1979), 155-164.

9. Junesang Choi, Anvar Hasanov and Mamasali Turaev, Linear independent solutions for the hypergeometric Exton function, Honam Mathematical J. 33 (2011), No. 2, pp. 223-229.

10. A. Hasanov, Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, Complex Variables and Elliptic Equations 52(8) (2007), 673-683.

11. A. Hasanov, Some solutions of generalized Rassias's equation, Intern. J. Appl. Math. Stat. 8(M07) (2007), 20-30.

12. A. Hasanov, The solution of the Cauchy problem for generalized Euler-Poisson- Darboux equation. Intern. J. Appl. Math. Stat. 8 (M07) (2007), 30-44.

13. A. Hasanov, Fundamental solutions for degenerated elliptic equation with two perpendicular lines of degeneration. Intern. J. Appl. Math. Stat. 13(8) (2008), 41-49.

14. A. Hasanov and E.T. Karimov, Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. Appl. Math. Letters 22 (2009), 1828-1832.

15. Hasanov, J.M. Rassias , and M. Turaev, Fundamental solution for the gen- eralized Elliptic Gellerstedt Equation, Book: "Functional Equations, Difference Inequalities and ULAM Stability Notions Nova Science Publishers Inc. NY, USA, 6 (2010), 73-83.

16. Anvar Hasanov, Rakhila B. Seilkhanova and Roza D. Seilova, Linearly independent solutions of the system of hypergeometric Exton function, Contemporary Analysis and Applied Mathematics Vol.3, No.2, 289-292, 2015

17. G. Lohofer, Theory of an electro-magnetically deviated metal sphere. 1: Absorbed power, SIAM J. Appl. Math. 49 (1989), 567-581.

18. A.W. Niukkanen. Generalized hyper-geometric series arising in physical and quantum chemical applications, J. Phys. A: Math. Gen. 16 (1983) 1813-1825.

19. H. M. Srivastava and P. W. Karlsson, Multiple Gaussian hyper-geometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane, and Toronto, 1985.

20. R.J. Weinacht, Fundamental solutions for a class of singular equations, Contrib. Differential Equations 3 (1964), 43-55.

21. A. Weinstein, Discontinuous integrals and generalized potential theory, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1946), 342-354.