ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

1-2019

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.927

БЕРНУЛЛИ ТЕНГЛАМАСИГА КЕЛТИРИБ ЕЧИЛАДИГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН КОШИ МАСАЛАСИ

М.Азизов, С.Рустамова

Аннотация

Мақолада Бернулли тенгламасига келтириб ечиладиган биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласи ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги ўрганилган. Масала ечимининг ягоналиги экстремум принципи ёрдамида исботланган.

Аннотация

В статье исследуется единственность и существование решения задачи Коши для обыкновенного дифференциалного уравнения первого порядка, приводимого к уравнению Бернулли. Единственность решения задачи доказывается методом принципа экстремума.

Annotation

This article investigates the uniqueness and existence of solution of the Koshi task for the ordinary differential equation of the first order which refer to Bernoulli equation. The uniqueness of the issue is proved by the principle of extremes.

Таянч сўз ва иборалар*: оддий дифференциал тенглама, масала ечимининг ягоналиги, масала ечимининг мавжудлиги.*

Ключевые слова и выражения*: обыкновенное дифференциальное уравнение, единственность решения задачи, существование решения задачи.*

Key words and expressions*: ordinary differential equation, unity of a solution, existence of a solution.*

S_1 **масаланинг қўйилиши.** $X=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ соҳада

$$y'(x)+P_1(x)y(x)+P_2(x)y^2(x)+P_3(x)y^3(x)=P(x) \quad (1)$$

тенгламани ва

$$y(0)=k \quad (2)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $y(x)\in C(\overline{X})\cap C^1(X)$ функция топилсин. Бу ерда $P(x),P_1(x),P_2(x),P_3(x)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Теорема. $y_1(x)-$ *(1) тенгламанинг (2) шартни қаноатлантирмайдиган бирор хусусий ечими бўлсин. У ҳолда, агар* $P_2(x)+3P_3(x)y_1(x)=0$, $Q_1(x)<0$ $\left(Q_1(x)>0\right)$ *ва* $y_1'(x)+P_1(x)y_1(x)+P_2(x)y_1^2(x)+P_3(x)y_1^3(x)=P(x)$ *шартлар бажарилган бўлса,* S_1 *масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади. Бу ерда* $P_1(x)+2P_2(x)y_1(x)+3P_3(x)y_1^2(x)=Q_1(x)$.

Исбот. Масала ечимининг ягоналиги. (1) тенгламанинг бирорта $y_1(x)$ хусусий ечими мавжуд бўлса, у ҳолда (1) тенгламада

$$y(x)=y_1(x)+z(x) \quad (3)$$

алмаштириш бажарамиз.

(3) алмаштиришни (1) тенгламага қўйиб, баъзи элементар соддалаштиришларни бажариб,

$$z'(x)+\left[P_1(x)+2P_2(x)y_1(x)+3P_3(x)y_1^2(x)\right]\cdot z+\left[P_2(x)+3P_3(x)y_1(x)\right]\cdot z^2+$$
$$+P_3(x)z^3(x)+\left[y_1'(x)+P_1(x)y_1(x)+P_2(x)y_1^2(x)+P_3(x)y_1^3(x)\right]=P(x)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Теореманинг шартларини эътиборга олсак, ушбу

М.Азизов– ФарДУ математик анализ ва дифференциал тенгламалар кафедраси ўқитувчиси.
С.Рустамова– ФарДУ, математика мутахассислиги магистранти.

$$z' + Q_1(x)z = -P_3(x)z^3 \tag{4}$$

Бернулли тенгламасини ва (3) алмаштиришга асосан эса (2) бошланғич шартдан

$$z(0) = k - y_1(0) \tag{5}$$

бошланғич шартни ҳосил қиламиз. (4) тенгламада

$$t(x) = \frac{1}{z^2(x)} \tag{6}$$

алмаштириш бажариб,

$$t'(x) - 2Q_1(x)t(x) = 2P_3(x) \tag{7}$$

$$t(0) = \frac{1}{(k - y_1(0))^2}, \quad k \neq y_1(0) \tag{8}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи янги {(7),(8)} масалага келамиз.

Фараз қиламиз, {(7),(8)} масала $t_1(x)$ ҳамда $t_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда

$$t(x) = t_1(x) - t_2(x) \tag{9}$$

функция

$$t'(x) - 2Q_1(x)t(x) = 0\ ,\ x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty), \tag{7'}$$

$$t(0) = 0 \tag{8'}$$

бир жинсли масаланинг ечими бўлади.

Фараз қилайлик, {($7'$),($8'$)} масала $t(x) \not\equiv 0$, $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ ечимга эга бўлсин. $(-\infty,+\infty)$ оралиқни қуйидагича,

$$(-\infty;+\infty) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [x_n, x_{n+1}]$$

кесмаларга бўлиб, бу кесмаларнинг ҳар бирида $t(x) \neq 0$ ечимни қидирамиз. Бу ерда

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [x_n, x_{n+1}] = \ldots \cup [x_{-n}, x_{-n+1}] \cup \ldots \cup [x_{-2}, x_{-1}] \cup [x_{-1}, x_0] \cup [x_0, x_1] \cup$$
$$\cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_n, x_{n+1}] \cup \ldots, \qquad x_0 = 0.$$

$t(x)$ функция $[0;x_1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлгани учун Вейерштрасснинг 2-теоремасига асосан мусбат максимум (манфий минимум) қийматга шу сегментнинг қандайдир $x'_0 \in (0;x_1]$ нуқтасида эришади.

$t(x)$ функция мусбат максимум (манфий минимум) қийматга $(0,x_1]$ ярим интервалда эришсин деб фараз қиламиз. Унда $t(x'_0) > 0$ (< 0) мусбат максимум (манфий минимум) қиймат деб фараз қилсак, $t'(x'_0) = 0$ тенглик ҳамда

$$t'(x_0) - 2Q_1(x_0)t(x_0) > 0$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса ($7'$) га зид. Демак, $t(x)$ функция $\forall x'_0 \in (0,x_1]$ да (($7'$) га асосан)

$$t(x) \equiv 0, \qquad \forall x'_0 \in (0,x_1] \tag{10}$$

бўлади. Бундан (9) га асосан $t_1(x) = t_2(x)$.

Энди $t(x)$ функция $[x_1, x_2]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлганлиги учун ($t(x_1)=0$ эканлигидан) Вейерштрасснинг 2-теоремасига асосан мусбат максимум (манфий минимум) қийматга шу интервалнинг қандайдир $x_1' \in (x_1; x_2]$ нуқтасида эришади деб фараз қиламиз. Айтайлик, $t(x)$ функция ўзининг мусбат максимум (манфий минимум) қийматига $(x_1, x_2]$ ярим интервалнинг қандайдир $x_1' \in (x_1, x_2]$ нуқтасида эришсин. Унда $t(x_1') > 0 \ \ (<0)$, яъни мусбат максимум (манфий минимум) қиймат деб фараз қилсак, у ҳолда $t'(x_1') = 0$, ҳамда

$$t'(x_1') - 2Q_1(x_1')t(x_1') > 0$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса ($7'$) га зид. Демак, $t(x)$ функция $\forall x_1' \in (x_1, x_2]$ да (9) га асосан $t_1(x) = t_2(x)$.

Бу жараённи n марта мусбат тарафга, n марта манфий тарафга давом эттириб ҳамда $n \to \infty$ да $x_n \to \infty$ ни эътиборга олсак, {($7'$),($8'$)} масаланинг ечими X соҳада $t(x) \equiv 0$ эканлиги келиб чиқади. Бундан эса {(7),(8)} масаланинг ечими биттадан ортиқ эмаслиги келиб чиқади.

Демак, {(7),(8)} масала агар у ечимга эга бўлса X соҳада у ягона. {(7),(8)} масаланинг ечими ягона эканлигидан {(1), (2)} масаланинг ечими ҳам ягона эканлиги келиб чиқади. Чунки, {(7),(8)} масала {(1),(2)} масалага эквивалент масаладир.

Масала ечимининг мавжудлиги. (7) тенглама умумий ечимини топиш учун Бернулли усулидан фойдаланиб, уни

$$t(x) = u(x) \cdot v(x) \tag{11}$$

кўринишда қидирамиз. (11) ни (7) га қўйиб

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \left[v'(x) - 2Q_1(x) \cdot v(x) \right] = 2P_3(x)$$

тенгликни ҳосил қилиб, бундан

$$v(x) = e^{2\int Q_1(x)dx}, u(x) = 2 \cdot \int e^{-2Q_1(x)} P_3(x)dx + C$$

функцияларни топиб, (11) га асосан (7) тенглама умумий ечимини

$$t(x) = 2e^{2Q_1(x)} \int e^{-2Q_1(x)} P_3(x)dx + Ce^{2Q_1(x)}$$

кўринишида топамиз.

Бу ечимни (8) шартга бўйсундириб

$$t(x) = 2 \cdot e^{2Q_1(x)} \int e^{-2Q_1(x)} P_3(x)dx + \left(\frac{1}{e^{2c}(k-b)^2} - 2d \right) \cdot e^{2Q_1(x)}$$

функцияни топамиз. Бу ерда $d = e^{2Q_1(0)} \int e^{-2Q_1(0)} P_3(0)dx$, $b = y_1(0)$, $c = Q_1(0)$. Бундан юқоридаги (6) ва (3) алмаштиришларга асосан орқага қайтиб (1) тенгламанинг (2) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини

$$y(x) = y_1(x) + \frac{e^{-\int 2Q_1(x)dx}}{\sqrt{2\int e^{-\int 2Q_1(x)dx} P_3(x)dx + \frac{1}{e^{2c}(k-b)^2} - 2d}}.$$

кўринишда топамиз. Теорема тўлиқ исботланди.

Мисол.

$$y'+y-3y^2+y^3=-1 \quad (1^*)$$

тенгламани ва

$$y(0)=k \quad (2^*)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи $y(x)$ функция топилсин.

Ечиш. Бу тенгламанинг хусусий ечимини $y_1=ax+b$ кўринишида қидирамиз. $y_1(x)$ функцияни тенгламага қўйиб,

$$a+(ax+b)-3(ax+b)^2+(ax+b)^3=-1$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликда баъзи бир ҳисоблашларни бажариб $a=0$ ва $b=1$ га тенг эканлигини топамиз, бундан тенгламанинг хусусий ечими $y_1(x)=1$ кўринишда бўлиши келиб чиқади.

Энди тенгламада

$$y=1+z(x) \quad (3^*)$$

алмаштиришни бажарсак,

$$z'-2z=-z^3 \quad (4^*)$$

кўринишдаги Бернулли тенгламасига ҳамда (2) бошланғич шартдан

$$z(0)=k-1 \quad (5^*)$$

бошланғич шартга келамиз. (4*) тенгламада

$$t(x)=\frac{1}{z^2(x)} \quad (6^*)$$

алмаштириш бажариб,

$$t'(x)+4t(x)=2 \quad (7^*)$$

тенглама ва

$$t(0)=\frac{1}{(k-1)^2}, \quad (k\neq 1) \quad (8^*)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи янги {(7*),(8*)} масалага келамиз. (7*) тенгламани (8*) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$t(x)=\frac{e^{4x}+\dfrac{2}{(k-1)^2}-1}{2e^{4x}}$$

кўринишда топилади. (6*) ва (3*) белгилашларга асосан (1*) тенгламани (2*) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими

$$y(x)=1+\frac{\sqrt{2}e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+\dfrac{2}{(k-1)^2}-1}}$$

кўринишда аниқланади.

Адабиётлар:

1.Ўринов А.Қ., Қосимов Х.Н., Ғозиев Қ.С. Дифференциал тенгламалар фанидан услубий кўрсатма. I-қисм. – Фарғона,2002.

2.Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. -Т.: Мумтоз сўз,2014.

3.Азизов М.С., Рустамова С.Т. XXI аср – интелектуал авлод асри. // Илмий-амалий анжуман материаллари. – Т.,20017.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор)