O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2022

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК.ФЕРГУ

Muassis: Farg‘ona davlat universiteti.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» “Scientific journal of the Fergana State University” jurnali bir yilda olti marta elektron shaklda nashr etiladi.

Jurnal filologiya, kimyo hamda tarix fanlari bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnaldan maqola ko‘chirib bosilganda, manba ko‘rsatilishi shart.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan 2020 yil 2 sentabrda 1109 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Muqova dizayni va original maket FarDU tahririy-nashriyot bo‘limida tayyorlandi.

Tahririyat manzili:
150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.
Tel.: (0373) 244-44-57. Mobil tel.: (+99891) 670-74-60
Sayt: www.fdu.uz. Jurnal sayti

Bosishga ruxsat etildi:
Qog‘oz bichimi: - 60×84 1/8
Bosma tabog‘i:
Ofset bosma: Ofset qog‘ozi.
Adadi: 10 nusxa
Buyurtma №
FarDU nusxa ko‘paytirish bo‘limida chop etildi.
Manzil: 150100, Farg‘ona sh., Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.

Farg‘ona,
2022.

K.Kodirov
O‘zbekiston Respublikasida mahkumlarni ijtimoiy foydali mehnatga jalb qilish 118
B.Jumayev
Gastronomik turizm tushunchasining paydo bo‘lishi va uning tarixiy asoslari 122
U.Usarov
Rossiya imperiyasi rasmiy amaldorlari va taftish komissiyalarining Turkistondagi yer-suv munosabatlariga doir faoliyatiga oid ba’zi mulohazalar 129
SH.Tosheva
VIII – XII asrlarda O‘rta Osıyo shaharlarıda kasbıy o‘zlıknıng o‘zıga xos xususıyatları 133

ADABIYOTSHUNOSLIK

A.Sabirdinov
Tuganmas ilhom manbai 138
Q.Yo‘lchiyev
Lirik janr haqida ba’zi mulohazalar 142
G.Mashrapova
Safar semantikasi va genezisiga doir ayrim mulohazalar 148
SH.Jumanova
Usmon Azim she’riyatida kuz motivi 151
E.Shevchenko
O‘zbek adabiyot sharhi: boshlanish davridan hozirgi kungacha 155
G.Nazarova
Ingliz hamda o‘zbek adabiyotida mifologik obrazlarning mifologizatsiyasi va ularning o‘ziga xosligi 161
D.Xusenova
Lev Tolstoyning hayoti va ijodiy faoliyatida sharqning o‘rni 165

TILSHUNOSLIK

X.Maxsudova, SH.Shahobiddinova
Эргонимларнинг лексик-семантик хусусиятлари 169
N.Achilova
Nemis va o‘zbek tillarida faunaga oid frazeologizmlar tasviri 173
Sh.Sultonova, O.Usmonov
Diniy frazeologizmlarning ichki shakli dinamik hodisa sifatida 178
Z.Akbarova, G.Sodiqova
Boshlang‘ich sinf o‘quvchilariga ko‘p ma’noli so‘zlarni o‘rgatishning psixofiziologik va psixolingvistik asoslari 182
I.Saydamatov
Ingliz va o‘zbek tillarida frazeologik tizimlarning o‘ziga xos xususiyatlari 186
Sh.Amonturdieva
Diniy uslubni yuzaga keltiruvchi ekstralingvistik omillar 191
M.Batirxanova
Somatik frazeologizmlarning tarjima masalalarida pragmatik funktsiyalarining tadqiqi 195
N.Djalilova
Nofilologik oliy o‘quv yurtlarida talabalarni chet til o‘qitish kommunikativ kompetentsiyasi 199
A.Zinatullina
O‘zbek va fransuz tillarini tarjima qilishdagi qiyinchiliklar 203

MATEMATIKA

A.O‘rinov, M.Azizov
Yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun to‘g‘ri to‘rtburchakda boshlang‘ich-chegaraviy masala 207
K.Xalilov
Singulyar koeffitsiyentli parabolo-giperbolik tenglama uchun integral shart va Bitsadze-Samarskiy sharti qatnashgan masalalar 225
T.Xasanov
Davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida manbali yuklangan Korteveg-de Friz tenglamasiga qo‘yilgan koshi masalasi 232

UDK: 517.956 DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss2/a44

DAVRIY CHEKSIZ ZONALI FUNKSIYALAR SINFIDA MANBALI YUKLANGAN KORTEVEG-DE FRIZ TENGLAMASIGA QO‘YILGAN KOSHI MASALASI

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LOADED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH A SOURCE IN THE CLASS OF PERIODIC INFINITE-GAP FUNCTIONS

Хасанов Темур Гафуржанович

Хасанов Темур Гафуржанович − базавой докторант, УрГУ

Annotatsiya

Ushbu maqolada teskari spektral masalalar usuli manbali yuklangan Korteveg-de Friz tenglamasini davriy cheksiz zonali funksiyalar sinfida integrallashga qo‘llanilgan. Koeffisiyenti manbali yuklangan Korteveg-de Friz tenglamasining yechimidan iborat bo‘lgan Xill operatorining spectral berilganlarining evolyutsiyasi keltirib chiqarilgan. Shu bilan bir qatorda cheksiz noma’lumli cheksizta Dubrovin differensial tenglamalar sistemasiga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimga egaligi isbotlangan. Bundan tashqari Dubrovin differensial tenglamalar sistemasining yechimi va birinchi izlar formulasi yordamida tuzilgan tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning yig‘indisi manbali yuklangan Korteveg-de Friz tenglamasini qaoatlantirishi ko‘rsatilgan.

Аннотация

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ) с источником в классе периодических бесконечнозонных функций. Вводится эволюция спектральных данных оператора Хилла, коэффициент которого является решением нагруженного уравнения КдФ с источником. Доказано разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда, построенного с помощью решения системы уравнений Дубровина и формулы первого следа, действительно удовлетворяет нагруженному уравнению КдФ с источником.

Abstract

In this paper, the inverse spectral problem method is used to integrate the loaded Korteweg-de Vries (KdV) equation with a source in the class of periodic infinite-gap functions. We introduce the evolution of the spectral data of the Hill operator whose coefficient is a solution of the loaded KdV equation with a source. The solvability of the Cauchy problem for an infinite system of Dubrovin's differential equations is proved. It is shown that the sum of a uniformly convergent functional series constructed by solving the system of Dubrovin's equations and the first trace formula indeed satisfies the loaded KdV equation with a source.

Kalit so‘zlar: *Korteveg-de Friz tenglamasi, Xill operatori, spektral berilganlar, teskari spektral masala, Dubrovin tenglamalar sistemasi, izlar formulasi.*

Ключевые слова: *уравнения Кортевега-де Фриза, оператор Хилла, спектральные данные, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов.*

Keywords: *Korteweg-de Vries equations, Hill operator, spectral data, inverse spectral problem, Dubrovin's system of equations, trace formulas.*

§1. Введение

Обратные спектральные задачи играют значительную роль при интегрирования некоторых важных эволюционных уравнений математической физики. Важный прорыв был сделан в октябре 1967 года с появлением статьи Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1], где было показано, что уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$q_t = 6qq_x - q_{xxx},\ q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x),\ x \in R,\ t > 0,$$

можно представить как условие совместности двух линейных дифференциальных уравнений, одно из которых оказалось уравнением Штурма-Лиувилля

$$H\psi \equiv -\psi''(x,k,t) + q(x,t)\psi(x,k,t) = k^2\psi(x,k,t),\ x \in R, t > 0.$$

Было отмечено, что если потенциал в этом уравнении меняется во времени согласно КдФ, то $\psi = \psi(x,k,t)$ удовлетворяет ещё одному линейному уравнению, а именно

$$\psi_t = -4\psi'''_{xxx} + 6q(x,t)\psi'_x + 3q_x(x,t)\psi.$$

Используя данное обстоятельство в [1] предложена процедура построения точных решений уравнения КдФ сведением её к обратной задаче теории рассеяния. Обратная задача теория рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля на всей прямой изучалась в работах Фаддеева [2], Марченко [3], Левитана [4] и др. статье [5] Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщил уравнение КдФ, вводя понятие высшего уравнения КдФ.

В современной научной литературе большое внимание привлекают интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения с источниками. Они имеют важные приложения в физике плазмы, гидродинамике, физике твёрдого тела и т.д. Например, уравнение КдФ, которое содержит источник интегрального типа в классе быстро убывающих функций, рассматривалось в работах [6-8]. Такими уравнениями можно описать взаимодействие длинных и коротких капиллярно-гравитационных волн. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3], [4], [9]-[15], а также [16]-[17].

Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного уравнения КдФ в классе периодических функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре оператора Хилла.

С помощью метода обратной задачи для оператора Хилла, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах Итса, Матвеева [18] и Дубровина, Новикова [19] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Кроме того, для конечнозонных потенциалов (т.е. для решения уравнения КдФ) была выведена явная формула через тета-функции Римана. Таким образом ими (см. [18],[19]) была доказана разрешимость задача Коши для уравнения КдФ при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3], [4], [11], [20], а также [21]-[22].

Известно [23], что если $q(x)=2a\cos 2x,\ a\neq 0$, то в спектре оператора Хилла $Ly\equiv -y''+q(x)y,\ x\in R$, открыты все лакуны: иначе говоря, $q(x)$ -периодический бесконечнозонный потенциал. В связи с этим мы изучаем задачу Коши для нагруженного уравнения КдФ с источником вида

$$\begin{gathered} q_t=a(t)q(x_0,t)(q_{xxx}-6qq_x)+b(t)q(x_1,t)q_x+ \\ +2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\frac{\partial}{\partial x}(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)), \end{gathered} \tag{1}$$

при начальном условие

$$q(x,t)\big|_{t=0}=q_0(x),\ q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(R), \tag{2}$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций

$$\begin{gathered} q(x+\pi,t)=q(x,t),\ x\in R,\ t>0, \\ q(x,t)\in C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geq 0). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $a(t),b(t)\in C[0,\infty)$ заданные непрерывные ограниченные функции, а $x_0,x_1\in R$. Кроме того $\alpha_k(t),\ k=\overline{0,\infty}$ -заданная действительная последовательность непрерывных функций удовлетворяющих условиям

$$\alpha_k(t)=\underline{\underline{O}}(\frac{1}{k^2}),\ k\to\infty\ .$$

Через $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ обозначено решение Флоке уравнения Хилла:

$$L(t)y\equiv -y''+q(x,t)y=\lambda y,\ x\in R,\ t>0\,. \tag{4}$$

Обозначим через $c(x,\lambda,t)$ и $s(x,\lambda,t)$ решение уравнения (4) соответственно с начальными условиями $c(0,\lambda,t)=1,\ c'(0,\lambda,t)=0,\ s(0,\lambda,t)=0,\ s'(0,\lambda,t)=1$. Последовательность действительных чисел $\lambda_k=\lambda_k(t),\ k\geq 0$ являются собственными значениями периодической и антипериодической задачи ($y(0,t)=\pm y(\pi,t),\ y'(0,t)=\pm y'(\pi,t)$) для уравнения (4). Поэтому решения Флоке $\psi_\pm(x,\lambda_k(t),t),\ k\geq 0$ удовлетворяют условиям

$$\psi_\pm(x+\pi,\lambda_k(t),t)=\pm\psi_\pm(x,\lambda_k(t),t),\ k\geq 0\,.$$

Следовательно $\left(\psi_\pm(x,\lambda_k(t),t)\right)^2,\ k\geq 0$ являются π -периодическими функциями.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x,t),\psi(x,\lambda_k,t),\ x\in R,\ t>0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спектральной задачи для оператора Хилла (4).

Следует отметить, что нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе прията называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решений или их производных на многообразиях меньшей размерности. Среди работ, посвящённых нагруженным уравнениям, следует отметить работы [24-25] и др.

§ 2. Предварительные сведения

В этом разделе для полноты изложения представлены некоторые из основных свойств оператора Хилла.

Рассмотрим в пространстве $L^2(R)$ оператор Хилла

$$Ly\equiv -y''+q(x)y=\lambda y,\ x\in R\,, \tag{5}$$

где $q(x)\in C^1(R)$ -действительная π -периодическая функция, $\lambda\in\mathbb{C}$ -комплексный параметр. Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (5), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1,\ c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0,\ s'(0,\lambda)=1$. Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова. Функции

$$\psi_\pm(x,\lambda)=c(x,\lambda)+\frac{s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{s(\pi,\lambda)}s(x,\lambda)$$

называются решениями Флоке уравнения (5).

Спектр оператора L представляет собой следующее множество [26]:

$$\sigma(L)=\{\lambda\in R:\left|\Delta(\lambda)\right|\leq 2\}=R\setminus\{(-\infty,\lambda_0)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\}\,,$$

при этом интервалы $(-\infty,\lambda_0),\,(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}),\,n\geq 1$ называется лакунами, где $\lambda_0,\,\lambda_{4k-1},\lambda_{4k}$ - собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi),\ y'(0)=y'(\pi)$), а $\lambda_{4k+1},\lambda_{4k+2}$ - собственные значения антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi),\ y'(0)=-y'(\pi)$) для уравнения (5).

Через $\xi_n,\,n\geq 1$, обозначим собственные значения задачи Дирихле ($y(0)=0,\ y(\pi)=0$) для уравнения (5), при этом имеют место включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}],\,n\geq 1.$

Определение 1. Числа $\xi_n,\ n\geq 1$, вместе со знаками

$$\sigma_n=sign\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}=\pm 1,\,n\geq 1$$

называются спектральными параметрами оператора L. Если $\xi_n=\lambda_{2n-1}$ или $\xi_n=\lambda_{2n}$, то $s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)=0$. В этом случае для определенности примем $\sigma_n=1$.

Задача нахождения спектральных данных оператора L называется прямой спектральной задачей, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным-обратной задачей для оператора L.

Потенциал $q(x)$ определяется единственным образом по спектральным данным $\{\lambda_{n-1},\xi_n,\sigma_n,n\geq 1\}$ (см.[27]).

Если в уравнение (5) вместо $q(x)$ использовать $q(x+\tau),\,\tau\in R$, то границы $\lambda_n(\tau),\,n\geq 0$ спектра получаемого оператора $L(\tau)y\equiv -y''+q(x+\tau)y=\lambda y$, не будут зависеть от параметра τ:
$\sigma(L(\tau))=\sigma(L),\,\lambda_n(\tau)=\lambda_n,\,n\geq 0$, а спектральные параметры зависят от параметра τ : $\xi_n=\xi_n(\tau),\sigma_n=\sigma_n(\tau),n\geq 1$, и являются периодическими функциями, т.е. $\xi_n(\tau+\pi)=\xi_n(\tau),\sigma_n(\tau+\pi)=\sigma_n(\tau),n\geq 1$, т.к. $q(x+\tau+\pi)=q(x+\tau)$. Эти спектральные параметры удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина

$$\dot{\xi}_n(\tau)=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}h_n(\xi), \tag{6}$$

и начальным условиям

$$\xi_n(\tau)\big|_{\tau=0}=\xi_n(0),\ \sigma_n(\tau)\big|_{\tau=0}=\sigma_n(0),\ n\geq 1 \tag{7}$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{k\neq n,\,k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\,n\geq 1. \tag{8}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Для дальнейшего исследования системы Дубровина сделаем замену переменных

$$\xi_n(\tau)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau),\ n\geq 1. \tag{9}$$

Тогда она примет вид

$$\frac{dx_n(\tau)}{d\tau}=H_n(x_1(\tau),x_2(\tau),...,x_n(\tau),...),\ n\geq 1, \tag{10}$$

$$x_n(0)=\arcsin\sqrt{\frac{\xi_n(0)-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}},\ n\geq 1 \tag{11}$$

где

$$H_n(x(\tau))=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\sigma_n(0)h_n\left(\xi_1(\tau),\xi_2(\tau),...\right),\ n\geq 1.$$

Введем банахово пространство

$$K=\{x(\tau)=(x_1(\tau),x_2(\tau),...):\left\|x(\tau)\right\|=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}-\lambda_{2k})\left|x_k(\tau)\right|<\infty\}.$$

Запишем систему (10), (11) в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau}=H(x(\tau)),\ \ x(\tau)\big|_{\tau=0}=x^0\in K. \tag{12}$$

Можно доказать, что при всех $x(\tau),y(\tau)\in K$ имеет место неравенство (см.[29,37])

$$\left\|H(x(\tau))-H(y(\tau))\right\|\leq L\left\|x(\tau)-y(\tau)\right\|,$$

где

$$L=C\sum_{n=1}^{\infty}n\gamma_n,\ \gamma_n=\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1},\ C=const. \tag{13}$$

Ряд (13) сходится, если периодический потенциал удовлетворяет условию

$$q(x+\pi)=q(x)\in C^2(R).$$

Поэтому бесконечная система дифференциальных уравнений Дубровина (6), (7) имеет единственное решение при любых начальных данных. Следовательно, система дифференциальных уравнений Дубровина и формула первого следа

$$q(\tau)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau)) \tag{14}$$

дают решение обратной задачи.

Обратные задачи для конечнозонных потенциалов впервые были рассмотрены Н.И.Ахиезером [28]. В его работе решение обратной задачи было сведено к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов. В статье [6] А.Р.Итс и В.Б.Матвеев нашли явную формулу для конечнозонных потенциалов. В случае конечнозонных потенциалов система дифференциальных уравнений (6) впервые была получена Дубровиным [21], в случае периодических потенциалов Трубовицом [29], а для почти периодических бесконечнозонных потенциалов – Левитаном [4].

Отметим, что впервые формула типа (14) была получена Хохштадтом [30] в случае, когда в спектре оператора L имеется конечное число лакун. Позже аналогичные формулы следов удалось получить Маккину и Мойербеке [31], Флашке [32], Левитану [4] и др.

В процессе изучения обратной спектральной задачи для оператора L, в работах Хохштадта [33], Марченко [3], Левитана, Гусейнова [34], Трубовица [29] и др. найдена связь между гладкостью потенциала $q(x)$ и длиной лакун.

Теорема 1. (Марченко [3]). Если $q(x)\in \tilde{W}_2^n[0,\pi]$ и $\operatorname{Im} q(x)=0$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи для оператора L удовлетворяют равенством

$$\sqrt{\lambda_{2k-1}},\sqrt{\lambda_{2k}}=k+\sum_{1\le 2j+1\le n+2}\frac{a_{2j+1}}{(2k)^{2j+1}}\mp\frac{|l_n(2k)|}{(2k)^{n+1}}+\frac{\gamma_k^{\pm}}{k^{n+2}}, \tag{15}$$

где a_{2j+1} - не зависят от k, и

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q(t)dt,\; l_n(p)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}q^{(n)}(t)\mathrm{e}^{-ipt}\,dt, \sum_{k=0}^{\infty}\left|\gamma_k^{\pm}\right|^2<\infty.$$

Здесь $\tilde{W}_2^n[0,\pi]$ - подпространство пространства Соболева $\tilde{\mathrm{W}}_2^n[0,\pi]$, состоящее из функций $f(x)\in \tilde{W}_2^n[0,\pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(\pi),\; k=\overline{0,n-1}$. Заметим, что $W_2^0[0,\pi]=\tilde{W}_2^0[0,\pi]=L^2[0,\pi]$.

Из асимптотических формул (15) вытекает следующая оценка для длин лакун:

$$\gamma_k\equiv\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot k^{-n}\cdot|l_n(2k)|+\frac{\alpha_k}{k^{n+1}}, \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2<\infty. \tag{16}$$

Теорема 2. (Трубовиц [29]). Для экспоненциального убывания длины лакун оператора L с π - периодическим действительным потенциалом $q(x)$ необходимо и достаточно аналитичность $q(x)$.

Теорема 3. (Хохштадт [35]). Для того чтобы число $\frac{\pi}{n}$, $n\ge 2$ было периодом потенциала $q(x)$ оператора L, необходимо и достаточно исчезновение всех лакун, номера которых не кратны n.

Эта теорема была доказана Боргом [36] в 1946 году для $n=2$.

§ 3. Эволюция спектральных данных

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $q(x,t),\psi_+(x,\lambda_k,t),k\ge 0,x\in R,t>0$ решение задачи (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_{n-1}(t),\xi_n(t),\sigma_n(t),n\ge 1\}$ оператора $L(t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

1). $\dot{\lambda}_n(t)=0,\; n\ge 0$;

2).

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n(t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(t))}h_n(\xi(t))\{a(t)q(x_0,t)[2q(0,t)+4\xi_n(t)]-$$

$$-b(t)q(x_1,t)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n(t)-\lambda_k}\},n\geq 1 \qquad (17)$$

Здесь знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)\Big|_{t=0} = \xi_n^0,\ \sigma_n(t)\Big|_{t=0} = \sigma_n^0,\ n\geq 1, \qquad (18)$$

где $\xi_n^0,\ \sigma_n^0 = \pm 1, n\geq 1$ - спектральные параметры оператора $L(0)$. Последовательность $h_n(\xi),\ n\geq 1$, участвующая в уравнении (17) определяется по формуле (8).

Доказательство. Положим

$$G(x,t) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\frac{\partial}{\partial x}(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)) \qquad (19)$$

где

$$G(x+\pi,t) = G(x,t),\ x\in R, t>0.$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$q_t = a(t)q(x_0,t)[q_{xxx}-6qq_x]+b(t)q(x_1,t)q_x+G(x,t). \qquad (20)$$

Пусть $q(x,t)$ π - периодическая по x функция удовлетворяющая уравнение (20). Обозначим через $y_n = y_n(x,t), n\geq 1$ ортонормированные собственные функции задача Дирихле ($y(0,t)=0, y(\pi,t)=0$) для уравнения (4), соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t), n\geq 1$. Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n(t), n\geq 1$ и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^{\pi} q_t(x,t)y_n^2(x,t)dx. \qquad (21)$$

Используя уравнения (20), из равенство (21) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^{\pi}\{a(t)q(x_0,t)[q_{xxx}-6qq_x]+b(t)q(x_1,t)q_x\}y_n^2(x,t)dx + \int_0^{\pi}G(x,t)y_n^2(x,t)dx. \qquad (22)$$

Ищем первообразную подынтегральной функции первом интеграле в виде квадратичной формы от y_n и y_n', т.е. пусть

$$(A_1y_n^2 + A_2y_ny_n' + A_3y_n'^2)' = \{a(t)q(x_0,t)[q_{xxx}-6qq_x]+b(t)q(x_1,t)q_x\}y_n^2, \qquad (23)$$

где функции $A_1 = A_1(x,t,\xi_n),\ A_2 = A_2(x,t,\xi_n),\ A_3 = A_3(x,t,\xi_n)$ не зависят от y_n и y_n'. Используя равенство $y_n'' = (q(x,t)-\xi_n(t))y_n$ и приравнивая коэффициенты, из (23) получим

$$A_2 = -A_3',\ A_1 = \frac{1}{2}A_3'' - A_3(q-\xi_n)$$

$$\frac{1}{2}A_3''' - 2A_3'(q-\xi_n) - A_3 q_x = a(t)q(x_0,t)[q_{xxx} - 6qq_x] + b(t)q(x_1,t)q_x . \quad (24)$$

Нетрудно заметить, что

$$A_3(x,t,\xi_n) = 2a(t)q(x_0,t)q(x,t) + A(t) ,$$

где

$$A(t) = 4a(t)q(x_0,t)\xi_n(t) - b(t)q(x_1,t) ,$$

удовлетворяет равенству (24). Таким образом, при

$$A_1(x,t,\xi_n) = a(t)q(x_0,t)q_{xx} - [2a(t)q(x_0,t)(q+2\xi_n) - b(t)q(x_1,t)](q-\xi_n) ,$$
$$A_2(x,t,\xi_n) = -2a(t)q(x_0,t)q_x ,$$
$$A_3(x,t,\xi_n) = a(t)q(x_0,t)(2q(x,t)+4\xi_n) - b(t)q(x_1,t)$$

выполняется равенство (23). Значит,

$$\int_0^\pi \{a(t)q(x_0,t)[q_{xxx} - 6qq_x] + b(t)q(x_1,t)q_x\} y_n^2(x,t)dx =$$

$$= (A_1 y_n^2 + A_2 y_n y_n' + A_3 y_n'^2)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = A_3 y_n'^2(x,t)\Big|_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= A_3(\pi,t,\xi_n)y_n'^2(\pi,t) - A_3(0,t,\xi_n)y_n'^2(0,t) = A_3(0,t,\xi_n)(y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)) =$$

$$= [a(t)q(x_0,t)(2q(0,t)+4\xi_n(t)) - b(t)q(x_1,t)]\cdot[y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)]. \quad (25)$$

Теперь вычислим второй интеграл в (22):

$$\int_0^\pi G(x,t)y_n^2(x,t)dx = \sum_{k=0}^\infty \alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\{\int_0^\pi y_n^2(\psi_k^2)'dx\} , \quad (26)$$

где

$$\psi_k \equiv \psi_+(x,\lambda_k,t) .$$

Интегрированием по частям, нетрудно видеть, что

$$2\int_0^\pi y_n^2(\psi_k^2)'dx = \int_0^\pi y_n^2(\psi_k^2)'dx + \int_0^\pi y_n^2 d(\psi_k^2) = \int_0^\pi \{y_n^2(\psi_k^2)' - (y_n^2)'\psi_k^2\}dx =$$

$$= \int_0^\pi 2y_n\psi_k(y_n\psi_k' - y_n'\psi_k)dx = \frac{1}{\xi_n - \lambda_k}[y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)] . \quad (27)$$

Так как

$$(y_n\psi_k' - y_n'\psi_k)' = (\xi_n - \lambda_k)y_n\psi_k ,\ 1 = \psi_+(0,\lambda_k,t) = \mp\psi_+(\pi,\lambda_k,t) .$$

Используя равенство (27), имеем

$$\int_0^\pi G(x,t)y_n^2(x,t)dx = [y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)]\{\sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n - \lambda_k}\} . \quad (28)$$

подставляя (25) и (28) в (22), получим

$$\dot{\xi}_n(t) = [y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t)]\{a(t)q(x_0,t)(2q(0,t)+4\xi_n(t)) -$$

$$-b(t)q(x_1,t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n - \lambda_k}\}. \qquad (29)$$

Так как собственные значения $\xi_n(t)$ задача Дирихле для уравнения (4) простые, поэтому

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x,\xi_n(t),t),$$

$$c_n^2(t) = \int_0^{\pi} s^2(x,\xi_n(t),t)dx = s'(\pi,\xi_n(t),t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}.$$

Используя эти равенства, имеем

$$y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t) = \frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}(s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}).$$

Подставляя в последнее равенство выражение

$$s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)} = \sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}$$

получим

$$y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t) = \frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь

$$\sigma_n(t) = sign\{s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)}\}.$$

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \lambda)(\lambda_{2k} - \lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi,\lambda,t) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}.$$

Следует, что

$$y_n'^2(\pi,t) - y_n'^2(0,t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t))}h_n(\xi).$$

Подставляя это равенство в (29), получим (17).

Теперь докажем независимость от t собственных значений $\lambda_n(t),\ n \ge 0$, периодической и антипериодической задачи для уравнения (4). Обозначим через $v_n(x,t)$ нормированную собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_n(t),\ n \ge 0$, периодической и антипериодической задачи для уравнения (4). Действуя вышеприведенным образом, получим равенства

$$\dot{\lambda}_n(t) = \{a(t)q(x_0,t)(2q(0,t)+4\lambda_n(t)) - b(t)q(x_1,t) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n-\lambda_k}\}[v_n'^2(\pi,t)-v_n'^2(0,t)].$$

Отсюда следует, что $\dot{\lambda}_n(t)=0, n\ge 0,$ т.к. $\nu_n(0,t)=\pm\nu_n(\pi,t),\ \nu_n'(0,t)=\pm\nu_n'(\pi,t)$. Это и означает независимость границы спектра оператора $L(t)$, от параметра t. ■

Следствие 1. Обозначим через $\lambda_n, n\ge 0, \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau),\ n\ge 1$ спектральные данные оператора

$$L(\tau)y \equiv -y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y,\ x\in R.$$

Пусть $q(x,t),\ \psi_\pm(x,\lambda_k,t), k\ge 0,\ x\in R, t>0$ решение задачи (1)-(3). Тогда спектральные данные $\lambda_n(\tau,t), n\ge 0, \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n\ge 1$ оператора Хилла

$$L(\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y,\ x\in R,\ \tau\in R \tag{30}$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n, n\ge 0,$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi(\tau,t))\{a(t)q(x_0,t)[2q(\tau,t)+4\xi_n(\tau,t)] -$$
$$-b(t)q(x_1,t) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n(\tau,t)-\lambda_k}\},\ n\ge 1 \tag{31}$$

где $s(x,\lambda,t,\tau)$ решение уравнение (30) с начальными условиями $s(0,\lambda,t,\tau)=0,\ s'(0,\lambda,t,\tau)=1$. Для функции $s(\pi,\lambda,t,\tau)$ имеет место

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t)-\lambda}{k^2}. \tag{32}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\ n\ge 1 \ . \tag{33}$$

Замечание 1. Используя формулу первого следа

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)) \tag{34}$$

и разложения (32), систему дифференциальных уравнений (31) можно переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t))}\times$$
$$\times h_n\left(\xi(\tau,t)\right)g_n\left(\xi(\tau,t)\right),\ n\ge 1, \tag{35}$$

$$g_n\left(\xi(\tau,t)\right) = a(t)\{\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(x_0,t))\}\times$$

$$\times\{2\lambda_0+2\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t))+4\xi_k(\tau,t)\}-$$

$$-b(t)\{\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(x_0,t))\}+\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)\prod_{m\neq n,m=1}^{\infty}\frac{\xi_m(\tau,t)-\lambda_k}{m^2},\ n\geq 1 \quad (36)$$

$$h_n\left(\xi(\tau,t)\right)=\sqrt{(\xi_n(\tau,t)-\lambda_0)\prod_{k\neq n,k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}},\ n\geq 1.$$

Для дальнейшего исследования системы уравнений Дубровина (35) с начальными условиями (33) сделаем замену переменных:

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t),\ n\geq 1. \quad (37)$$

Тогда она примет вид

$$\frac{dx_n(\tau,t)}{dt}=H_n(x_1(\tau,t),x_2(\tau,t),...),\ n\geq 1, \quad (38)$$

$$x_n(\tau,0)=x_n^0(\tau)=\arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau)-\lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}}},\ n\geq 1 \quad (39)$$

где

$$H_n(x(\tau,t))=(-1)^n\sigma_n^0(\tau)h_n(\xi_1(\tau,t),...)g_n(\xi_1(\tau,t),...),$$

$$\sigma_n(\tau,t)sign\{\sin x_n(\tau,t)\cos x_n(\tau,t)\}=\sigma_n^0(\tau).$$

Для изучения задача Коши (38), (39) введем банахово пространство:

$$K=\{x(\tau,t)=(x_1(\tau,t),...,x_n(\tau,t),...):\ \|x(\tau,t)\|=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})|x_n|<\infty\}.$$

Перепишем систему (38), (39) в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\ x(\tau,t)\big|_{t=0}=x^0(\tau). \quad (40)$$

Из условий $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(R)$ и асимптотика собственных значений (15) при $n=4$, а также учитывая $\xi_n(\tau,t)\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ получим, что

$$\inf_{k\neq n}\left|\xi_n(\tau,t)-\xi_k(\tau,t)\right|\geq a>0.$$

Теперь, пользуясь этим неравенством и (15) при $n=4$, оценим функции $\left|h_n(\xi(\tau,t))\right|$, $\left|\frac{\partial h_n(\xi(\tau,t))}{\partial\xi_m}\right|$ и $\left|g_n(\xi(\tau,t))\right|$, $\left|\frac{\partial g_n(\xi(\tau,t))}{\partial\xi_m}\right|$.

Лемма 1. Справедливы следующие оценки

1. $C_1 n \le \left|h_n(\xi(\tau,t))\right| \le C_2 n$, $\left|\dfrac{\partial h_n(\xi(\tau,t))}{\partial \xi_m}\right| \le C_3 n$, (41)

2. $\left|g_n(\xi(\tau,t))\right| \le C_4 n^2$, $\left|\dfrac{\partial g_n(\xi(\tau,t))}{\partial \xi_m}\right| \le C_5$. (42)

Доказательство. Неравенство (41) доказана в работе [37]. Учитывая (36) и асимптотики собственных значений ξ_n задачи Дирихле для уравнения (30), следует оценки (42).

Лемма 2. Если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^4(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховым пространстве K, т.е. существует константа $L = const > 0$, такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t), y(\tau,t) \in K$ выполняется следующее неравенство

$$\left\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\right\| \le L\left\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\right\|.$$

Доказательство. Сперва оценим производную функции

$$F_n(\xi) = g_n(\xi)h_n(\xi),$$

$$\left|\frac{\partial F_n(\xi(\tau,t))}{\partial \xi_m}\right| \le \left|\frac{\partial g_n(\xi(\tau,t))}{\partial \xi_m}\right| \cdot \left|h_n(\xi(\tau,t))\right| + \left|g_n(\xi(\tau,t))\right| \cdot \left|\frac{\partial h_n(\xi(\tau,t))}{\partial \xi_m}\right| \le$$

$$\le C_5 C_2 n + C_4 C_3 n^3 \le C_6 n^3.$$

Используя выражение $H_n(x(\tau,t)) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) F_n(\xi(\tau,t))$, получим равенство $\left|H_n(x(\tau,t)) - H_n(y(\tau,t))\right| = \left|F_n(\xi(\tau,t)) - F_n(\eta(\tau,t))\right|$. Теперь применим теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(\xi + t(\eta - \xi))$ на отрезке $t \in [0,1]$. Тогда получим равенство $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t^*)$, т.е.

$$F_n(\xi) - F_n(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m} \cdot (\xi_m - \eta_m),$$

где $\theta = \xi + t^*(\eta - \xi)$. Отсюда следует, что

$$\left|H_n(x(\tau,t)) - H_n(y(\tau,t))\right| = \left|F_n(\xi(\tau,t)) - F_n(\eta(\tau,t))\right| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{\partial F_n(\theta)}{\partial \xi_m}\right| \cdot \left|\xi_m(\tau,t) - \eta_m(\tau,t)\right| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty} C_6 n^3 (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \left|\sin^2 x_m(\tau,t) - \sin^2 y_m(\tau,t)\right| \le$$

$$\le C_6 n^3 \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \left| x_m(\tau,t) - y_m(\tau,t) \right| = C_6 n^3 \left\| x(\tau,t) - y(\tau,t) \right\|.$$

Здесь

$$\xi_m(\tau,t) = \lambda_{2m-1} + (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \sin^2 x_m(\tau,t),$$

$$\eta_m(\tau,t) = \lambda_{2m-1} + (\lambda_{2m} - \lambda_{2m-1}) \sin^2 y_m(\tau,t).$$

Теперь оценим норму $\left\| H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t)) \right\|$:

$$\left\| H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t)) \right\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \left| H_k(x(\tau,t)) - H_k(y(\tau,t)) \right| \le$$

$$\le C_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 (\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}) \left\| x(\tau,t) - y(\tau,t) \right\| = L \left\| x(\tau,t) - y(\tau,t) \right\|,$$

где

$$L = C_6 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \gamma_k \, . \tag{43}$$

Таким образом, условие Липщица выполняется. Поэтому, решение задачи Коши (35), (33) для всех $t > 0$ и $\tau \in R$ существует и единственно.

Замечание 2. Теорема 4 и лемма 2 дает метод решения задачи (1)-(3).

Доказательство. Сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, n \ge 0, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \ge 1$, для оператора $L(\tau,0) = L(\tau)$. Обозначим через $\lambda_n, n \ge 0, \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n \ge 1$, спектральные данные оператора $L(\tau,t)$. После этого в уравнении (35) и в начальных условиях (33) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решая полученные задачи Коши, находим $\xi_n(x_0,t), n \ge 1$ и $\xi_n(x_1,t), n \ge 1$. Затем из формулы (34) определим функции $q(x_0,t)$ и $q(x_1,t)$. Далее, подставляя эти данные в систему уравнений (31), и решая задачу Коши (31), (33) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t), n \ge 1$. Из формулы следов (34), получим $q(\tau,t)$. После этого легко найти решения Флоке $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ уравнения (4).

До сих пор мы предполагали, что задача Коши (1)-(3) имеет решение. От этого предположения не трудно освободиться, непосредственно убедившись, что полученная таким способом функция $q(\tau,t)$ и $\psi_+(\tau,\lambda_k,t), k \ge 0, \tau \in R, t > 0$ действительно удовлетворяет уравнению (1).

Замечание 3. Покажем, что найденные $q(\tau,t)$, $\psi_+(\tau,\lambda_k,t)$, $k \ge 0$ действительно удовлетворяют уравнению (1). Для этого используем систему первого уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\overline{h}_n(\xi),\ n \geq 1, \tag{44}$$

где

$$\overline{h}_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau,t)) \cdot h_n(\xi)}$$

и вторую формулу следов

$$q^2(\tau,t) - \frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau,t)). \tag{45}$$

Из систем Дубровина (31) и (44), имеем

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = -\{a(t)q(x_0,t)[2q(\tau,t) + 4\xi_n(\tau,t)] -$$

$$-b(t)q(x_1,t) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n(\tau,t)-\lambda_k}\}\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau},\ n \geq 1. \tag{46}$$

Дифференцируя формулы первого следа (34) по t и учитывая (46), находим

$$q_t = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2a(t)q(x_0,t)[2q(\tau,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau}] - 2b(t)q(x_1,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\{\frac{\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n(\tau,t)-\lambda_k}\}\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial \tau},\ n \geq 1 \tag{47}$$

Далее дифференцируя по τ формулы следов (34) и (45), а также (32), получим

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = -q_\tau,\ 4\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\frac{\partial \xi_n}{\partial \tau} = \frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau} - 2qq_\tau, \tag{48}$$

$$\frac{\partial s(\pi,\lambda_k,t,\tau)}{\partial \tau} = s(\pi,\lambda_k,t,\tau)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial \xi_n \backslash \partial \tau}{\xi_n - \lambda_k}. \tag{49}$$

Используя эти равенства и учитывая тождества

$$s(\pi,\lambda_k,t)\psi_+^2(\tau,\lambda_k,t) = s(\pi,\lambda_k,t,\tau) \tag{50}$$

из (47) выводим

$$q_t = a(t)q(x_0,t)(q_{\tau\tau\tau} - 6qq_\tau) + b(t)q(x_1,t) + 2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)).$$

Замечание 4. Равномерная сходимость рядов (34), (43), (45), (48) следует из (15)-(16) при $n=4$ и оценки $c_1 n \leq \left|\overline{h}_n(\xi)\right| \leq c_2 n,\ n \geq 1$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ не зависят от n.

Замечание 5. Покажем равномерную сходимость функционального ряда, участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся тождеством (50). Из асимптотических формул ($\lambda \to \infty$)

$$c(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}),\ s(x,\lambda,t)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\lambda}),$$

$$c'(x,\lambda,t)=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+\underline{\underline{O}}(1),\ s'(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}),$$

и равенства (50) следует оценки

$$s(\pi,\lambda_k,t,\tau)=\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}),\ s(\pi,\lambda_k,t)\frac{\partial}{\partial\tau}(\psi_+^2(x,\lambda_k,t))=\frac{\partial s(\pi,\lambda_k,t,\tau)}{\partial\tau}=\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}).$$

Эти оценки и условия $\alpha_k(t)=O(k^{-2}),\ k\to\infty$ обеспечивают равномерную сходимость функционального ряда, участвующего в уравнении (1).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5. Если начальные функции $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^4(R)$, то существует единственное решение $q(x,t)$, $x\in R$, $t>0$ задачи (1)-(3), которое определяется суммой ряда (34) и принадлежит классу $q(x,t)\in C_x^3(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geq 0)$.

Следствие 2. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной π - периодической аналитической функцией, то решение $q(x,t)$ задачи (1)-(3) тоже является действительной аналитической функцией по x.

Это утверждение следует из теоремы Трубовица. Так как длины лакун, соответствующие потенциалу $q_0(x)$, убывают экспоненциально, а потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, то $q(x,t)$ является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 3. Если число $\frac{\pi}{n}$ является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n, исчезают. Потенциалу $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта, число $\frac{\pi}{n}$ является периодом и для функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n\geq 2$ натуральное число, а лакуна ($\lambda_{2k-1},\lambda_{2k}$) имеет номер k.

Список литературы:

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteveg-de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p.1095-1098.
2. Фаддеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера.// Тр. МИ АН СССР, 73(1964), с. 314-336.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев «Наукова думка», 1977.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.
5. Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.// Comm. Pure and Appl. Math., 1968. v.21. p.467-490.

6. Me'lnikov V.K. Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source. Physics Letters A, 133, 9, 493-496 (1988).
7. Mel'nikov V.K. Integration of the Korteweg-de Vries equation with source. Inverse problems 6, 2, 233-246 (1990).
8. Claude C., Leon J. Latifi A. Nonlinear resonant scattering and plasma instability: an integrable model. J. Math. Phys, 32,3321-3330 (1991).
9. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: «Мир». 1983.
10. Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов. Москва «Мир». 1983.
11. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., Теория солитонов: метод обратной задачи, М.: Наука, 1980.
12. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: «Мир». 1987.
13. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов, М., Наука,
14. Додд Р., Эйилбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: «Мир». 1988.
15. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов. М.: Ижевс. 2008.
16. Zeng Y., Ma W.X., Lin R. Integration of the solution hierarchy with self-consistent source. J.Math.Phys., 41:8(2000), 5453-5489.
17. Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions. Proceeding of the institute of Math. And Mechan. National academy of sciences of Azerbaijan, vol., 7, № 2, 2021, p. 250-261.
18. Итс. А.Р., Матвеев В.Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза.//ТМФ,23:1(1975), с.51-68.
19. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза.//ЖЭТФ,67:12(1974), 2131-2143.
20. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г., Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты, Киев, Наукова думка, 1987.
21. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. //Функц. анализ и его прил. – Москва, 1975. т. 9. вып. 3. с. 41-51.
22. Matveev V.B. 30 years of finite-gap integration theory. //Phil. Trans. R Soc. A (2008), 366, p. 837-875.
23. Ince E.L. Ordinary differential equations. (New York: Dover. 1956)
24. Нахушеев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
25. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. Ж. Вычисл. матем. и матем. Физ. 44, 694-716 (2004).
26. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.I-II. –М.: «ИЛ», 1961.
27. Станкевич И.В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла. ДАН СССР, 192 (1), 34-37 (1970).
28. Ахиезер Н.И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов. ДАН СССР, 141(2), 262-266(1961).
29. Trubowtz E. The inverse problem for periodic potentials. Comm. Pure. Appl. Math., -New York, 30, 321-337. (1977).
30. Hochstadt H. On the determination of Hill's equation from its spectrum. Arch. Rat. Mech. Anal. -Springer, 19, 353-362 (1965).
31. Mckean H.P., Moerbeke P. The spectrum of Hill's equation. Invent. Math., 30(3), 217-274(1975).
32. Flachka H. On the inverse problem for Hill's operator. Arch. Rational Mech. Anal., 59 (4), 293-309 (1975).
33. Hochstadt H. Estimates on the stability interval's for the Hill's equation. Proc. AMS, 14, 930-932 (1963).
34. Левитан Б.М., Гусейнов Г.Ш. Вычисление главного члена асимптотики длины лакуны периодической задачи Штурма-Лиувилля. Сердика Българско математическо списание. т 3, № 4. С. 273-280 (1977). www.math.bas.bg/serdica/1977/1977-273-280.pdf.
35. Hochstadt H. A Generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equations. J. Math. Anal. and Appl. – Elsevier, 102, 599-605 (1984).
36. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgable. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwete Acta Math.-Berlin, 78, 1-96 (1946).
37. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций.// Записки научных семинаров ПОМИ, т. 506, 2021, с. 258-279.