O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2022

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК.ФЕРГУ

Muassis: Farg‘ona davlat universiteti.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» “Scientific journal of the Fergana State University” jurnali bir yilda olti marta elektron shaklda nashr etiladi.

Jurnal filologiya, kimyo hamda tarix fanlari bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnaldan maqola ko‘chirib bosilganda, manba ko‘rsatilishi shart.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan 2020 yil 2 sentabrda 1109 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Muqova dizayni va original maket FarDU tahririy-nashriyot bo‘limida tayyorlandi.

Tahririyat manzili:
150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.
Tel.: (0373) 244-44-57. Mobil tel.: (+99891) 670-74-60
Sayt: www.fdu.uz. Jurnal sayti

Bosishga ruxsat etildi:
Qog‘oz bichimi: - 60×84 1/8
Bosma tabog‘i:
Ofset bosma: Ofset qog‘ozi.
Adadi: 10 nusxa
Buyurtma №
FarDU nusxa ko‘paytirish bo‘limida chop etildi.
Manzil: 150100, Farg‘ona sh., Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.

Farg‘ona,
2022.

ADABIYOTSHUNOSLIK

TILSHUNOSLIK

MATEMATIKA

MATEMATIKA

UDK: 917.556.6 **DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss2/a43**

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI PARABOLO-GIPERBOLIK TENGLAMA UCHUN INTEGRAL SHART VA BITSADZE-SAMARSKIY SHARTI QATNASHGAN MASALALAR

ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ И УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

PROBLEMS WITH INTEGRAL AND BITSADZE-SAMARSKY CONDITION FOR A SECOND-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH A SINGULAR COEFFICIENT

Халилов Кобилжон Солижонович[1]

[1]**Халилов Кобилжон Солижонович** – преподаватель, ФерГУ

Аннотация

Аралаш соҳада сингуляр коэффициентли параболо-гиперболик тенглама учун параболик соҳада интеграл шарт ва гиперболик соҳада Бицадзе-Самарский шарти қатнашган масалалар баён қилинган. Қўйилган масалаларнинг бир қийматли ечилиши интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланган. Бунда гиперболик типдаги сингуляр коэффициентли тенглама учун соҳада кўриниши ўзгартирилган Коши масаласи ечими формуласидан ва параболик типдаги тенглама учун биринчи чегаравий масала ечими кўринишидан фойдаланилган.

Аннотация

В работе поставлены и исследованы неклассические задачи с интегральным условием в параболической подобласти и условием Бицадзе-Самарского в гиперболической подобласти для параболо-гиперболического уравнения со сингулярным коэффициентом. Однозначная разрешимость поставленных задач доказана методом интегральных уравнений. При этом использована формула решения видоизмененной задачи Коши для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом и представление решения первой краевой задачи для параболического уравнения.

Abstract

In the work, non-classical problems with an integral condition in a parabolic subdomain and the Bitsadze-Samarsky condition in a hyperbolic subdomain for a parabolic-hyperbolic equation with a singular coefficient have been formulated and investigated. The unique solvability of the considered problems was proved by the method of integral equations. In this case, the formulas for solution to the modified Cauchy problem for a hyperbolic equation with a singular coefficient and the solution of the first boundary value problem for a parabolic equation were used.

Калит сўзлар: *параболо-гиперболик тенглама, интеграл шарт, Бицадзе-Самарский шарти, ечимнинг ягоналиги, ечимнинг мавжудлиги, сингуляр коэффициент.*

Ключевые слова: *параболо-гиперболическое уравнение, интегральное условие, условие Бицадзе-Самарского, единственность решения, существование решения, сингулярный коэффициент.*

Keywords and expressions: *parabolic-hyperbolic equation, integral condition, condition of Bitsadze-Samarskiy, the uniqueness of solution, the existence of solution, singular coefficient.*

I. Введение

Одним из направлений современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, бурно развивающимся в последнее время, является теория нелокальных задач. Внимание к таким задачам обусловлено не только теоретическим интересом, но и практической необходимостью. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Неклассические задачи с интегральными условиями встречаются, например, при математическом моделировании некоторых процессов теплопроводности, влагопереноса в капиллярно-пористых средах, процессов, происходящих в турбулентной плазме, при изучении задач математической биологии.

Вопросы разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах Дж.Кэннона, Л.И.Камынина, А.К.Гущина, Л.А.Муравья и А.В.Филиновского, Н.И.Юрчука, Н.И.Ионкина, А.Бузиани, Д.Г.Гордезиани и Г.А.Авалишвили, А.И.Кожанова, Л.С.Пулькиной и других авторов (например см. [1-5]).

В настоящее время остаются мало изученными вопросы постановки и разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений смешанного типов (например см. [6-10]).

В настоящей заметке поставлена и исследована нелокальная задача с интегральным условием для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа второго порядка.

В области $D = D_1 \cup D_0 \cup D_2$ рассмотрим параболо-гиперболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \dfrac{2\beta}{y} u_y, & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\beta \in R$, причем $0 < \beta < 1/2$, $D_1 = \{(x,y):\ 0 < x, y \le 1\}$, $D_2 = \{(x,y): -y < x < y+1,\ (-1/2) < y < 0\}$, $D_0 = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$.

II. Постановка задач

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$ со следующими свойствами:

1) в области $D_1 \cup D_2$ удовлетворяет уравнению (1);

2) на границе области D удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 u(x,y)\,dx = \int_0^y p(t,y)\,u(1,t)\,dt + \mu_1(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{2}$$

$$u(1,y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1; \tag{3}$$

$$D^{\beta}_{x1}(1-x)^{2\beta-1} u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) + a(x)u(x,0) = b(x), \quad 0 \le x \le 1; \tag{4}$$

3) на отрезке выполняется условие

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, $p(x,y)$ – заданные непрерывные функции.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \bigcap C^{2,2}_{x,y}(D_2)$, удовлетворяющую условиям задачи 1, когда условия (2) заменено на

$$u(1,y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx + \mu_1(y), \quad 0 \le y \le 1. \tag{6}$$

III. Исследование задачи 1

Докажем однозначную разрешимость поставленных задач.

Сначала рассмотрим задачу 1. Пусть $u(x,y)$ – решения задачи 1. Принимая во внимание условия (5) и $u(x,y) \in C(D)$, примем следующие обозначения:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1;$$

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = \nu(x),\ 0 < x < 1$$

и предположим, что $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(2,\delta)}(0,1)$, $\delta > 1 - 2\beta$; $\nu_2(x) \in C^2(0,1)$, $[x(1-x)]^{-\beta} u_y(x,y) \in L(0,1)$. Тогда решение задачи 1, как решение видоизмененной задачи Коши для уравнения $u_{xx} - u_{yy} - (2\beta/y)u_y = 0$ в области D_2, представима виде [11]

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1\tau[x+y(-2t+1)][t(1-t)]^{\beta-1}dt-$$
$$-\gamma_2(-y)^{1-2\beta}\int_0^1\nu[x+y(-2t+1)][t(1-t)]^{-\beta}dt\,, \tag{7}$$

где $\gamma_1=\Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2=\Gamma(1-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [12].

Отсюда находим,

$$u\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\gamma_1\int_0^1\tau\left[x(1-t)+t\right]\left[t(1-t)\right]^{\beta-1}dt-$$
$$-\gamma_2\left(\frac{1-x}{2}\right)^{1-2\beta}\int_0^1\nu\left[x(1-t)+t\right]\left[t(1-t)\right]^{-\beta}dt\,.$$

Выполнив замену в интегралах по формуле $z=x(1-t)+t$, имеем

$$u\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\gamma_1\Gamma(\beta)(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}\left[\tau(x)(1-x)^{\beta-1}\right]-$$
$$-\gamma_2 2^{2\beta-1}\Gamma(1-\beta)D_{x1}^{\beta-1}\left[\nu(x)(1-x)^{-\beta}\right],\quad 0<x<1, \tag{8}$$

где

$$D_{x1}^{\gamma}\left[f(x)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\gamma)}\displaystyle\int_0^x(t-x)^{-\gamma-1}f(t)dt \quad при\ \gamma<0,\\ f(x) \quad при\ \gamma=0,\\ \dfrac{-1}{\Gamma(1-\gamma)}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^1(t-x)^{-\gamma}f(t)dt \quad при\ \gamma>0.\end{cases}$$

Подставляя (7) в условие (4) и учитывая тождества [12]

$$D_{x1}^{\beta}D_{x1}^{-\beta}f(x)=f(x),\ D_{x1}^{\beta}(1-x)^{2\beta-1}D_{x1}^{\beta-1}\left[\nu(x)(1-x)^{1-\beta}\right]=(1-x)^{\beta-1}D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x)\,,$$

получим

$$a_1(x)\tau(x)-\gamma_3D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x)=b_1(x)\,,\qquad 0<x<1\,,$$

где $a_1(x)=\gamma_1\Gamma(\beta)+(1-x)^{1-\beta}a(x)$, $b_1(x)=(1-x)^{1-\beta}b(x)$, $\gamma_3=\gamma_2 2^{2\beta-1}\Gamma(1-\beta)$.

Применяя к этому равенству оператор $D_{x1}^{1-2\beta}$, а затем принимая во внимание тождество $D_{x1}^{1-2\beta}D_{x1}^{2\beta-1}\nu(x)=\nu(x)$, получим соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на отрезок D_0 из области D_2:

$$\nu(x)=\gamma_3^{-1}D_{x1}^{1-2\beta}\left[a_1(x)\tau(x)\right]+\gamma_3^{-1}D_{x1}^{1-2\beta}b_1(x),\quad 0<x<1\,, \tag{9}$$

Далее, переходя к пределу при $y\to+0$ и в уравнения (1) и условиях (2), (3), получим

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\quad 0<x<1; \tag{10}$$

$$\int_0^1\tau(x)dx=\mu_1(0)\,,\ \tau(1)=\mu_2(0)\,. \tag{11}$$

Исключая из (9) и (10) функцию $\nu(x)$, получим интегро-дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\tau(x)$:

$$\tau''(x)-D_{x1}^{1-2\beta}\left[a_1\left(x\right)\tau(x)\right]=D_{x1}^{1-2\beta}b_1(x),\quad 0<x<1. \tag{12}$$

Таким образом, относительно $\tau(x)$ имеем задачу {(11),(12)}.

Сначала докажем единственность задачи. Для этого достаточно, доказать, что однородная задача

$$\left.\begin{array}{l}\tau''(x)-D_{x1}^{1-2\beta}\left[a_1\left(x\right)\tau(x)\right]=0,\quad 0<x<1;\\ \int\limits_0^1\tau(x)dx=0,\qquad \tau(1)=0.\end{array}\right\} \tag{13}$$

Пользуясь принципа экстремума для дифференциальных операторов $D_{x1}^{1-2\beta}$, как и в работе [13], можно убедиться, что при выполнении условий

$$a_1\left(x\right)\in C^1\left[0,1\right],\ a_1\left(x\right)\ge 0;\ a_1'\left(x\right)\le 0,\ x\in\left[0,1\right]. \tag{14}$$

задача (13) имеет только тривиальное решение.

Из этого факта следует, что задача {(11),(12)} не может иметь более одного решения.

Теперь переходим к доказательству решения задачи {(11),(12)}. С этой целью, в уравнение (12) переобозначая x через z, а затем интегрируя полученное уравнение дважды по z в промежутке $\left[x,1\right]$, получим

$$\tau(x)-\int\limits_x^1 K(x,t)\tau(t)dt=f_1(x)-\tau'\left(1\right)\left(1-x\right),\ 0\le x\le 1, \tag{15}$$

где $f_1\left(x\right)=\mu_2\left(0\right)+\int\limits_x^1\left(t-x\right)D_{t1}^{1-2\beta}b_1\left(x\right)dt$, $K\left(x,t\right)=\dfrac{a_1\left(t\right)}{\Gamma\left(1+2\beta\right)}\left(t-x\right)^{2\beta}$.

Очевидно, что $K\left(x,t\right)$ непрерывна на квадрате $\left\{\left(x,t\right):0\le x\le 1,0\le t\le 1\right\}$, а $f_1\left(x\right)$ – непрерывна на интервале $\left[0,1\right]$.

Интегрируя последнее уравнение на интервале $\left[0,1\right]$, согласно первому из условию (11), получим

$$\int\limits_0^1\tau\left(t\right)\left\{\int\limits_t^x K_1\left(x,t\right)dx\right\}dt+\int\limits_0^1 f_1\left(x\right)dx-\frac{1}{2}\tau'\left(1\right)=\mu_1\left(0\right).$$

Из этого равенства найдём $\tau'\left(1\right)$ и подставим его в уравнение (15). Тогда, после некоторых вычислений, получим следующее неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\tau\left(x\right)$, эквивалентное задаче {(11), (12)}:

$$\tau\left(x\right)+\int\limits_0^1 K_1\left(x,t\right)\tau\left(t\right)dt=f_2\left(x\right),\ 0<x<1, \tag{16}$$

где

$$K_1\left(x,t\right)=\begin{cases}2\left(1-x\right)\int\limits_t^1 K\left(z,t\right)dz-K_1\left(x,t\right), & t\le x,\\ 2\left(1-x\right)\int\limits_t^1 K\left(z,t\right)dz, & t>x,\end{cases}$$

$$f_2\left(x\right)=f_1\left(x\right)-2\left(1-x\right)\mu_2\left(0\right)+2\left(1-x\right)\int\limits_0^1 f_1\left(z\right)dz.$$

В силу условия, наложенные на заданные функции $K_1(x,t)\in C\left[0\le x,t\le 1\right]$, $\left(\partial/\partial x\right)K_1\left(x,t\right)$ имеет слабую особенность, а $f_2(x)\in C^2[0,1]$.

Если будем рассматривать однородную задачу (13), тогда имеем однородное интегральное уравнение в виде

$$\tau\left(x\right)+\int_0^1 K_2\left(x,t\right)\tau\left(t\right)dt=0 \tag{17}$$

Поскольку задача (13) имеет только тривиальное решение, то, в силу эквивалентности, уравнение (17) также имеет только тривиальное решение. Поэтому, неоднородное интегральное уравнение (16), на основании альтернативе Фредгольма, имеет единственное решение. В силу ядра и правой части уравнения (16) $\tau(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$. В этом случае, поскольку задача {(11),(12)} и уравнение (16) эквивалентны, то решение уравнения (16) будет также решением задачи (13).

Таким образом, задача 1 эквивалентна сведена к следующей задаче в области D_2: найти регулярное в области D_1 решение $u\left(x,y\right)\in C\left(\overline{D_1}\right)$ уравнения $u_{xx}-u_y=0$, удовлетворяющее условиям (2), (3) и $u(x,0)=\tau(x),\ \ x\in\left[0,1\right]$, где $\tau(x)$ – известная функция, найденная формулой (16).

Докажем однозначной разрешимости решения этой задачи 1.3'. Пусть $u(x,y)$ – есть решение задачи 1.3'. Введем обозначение $u(0,y)=\mu(y),\ \ 0\le y\le 1$. Тогда решение задачи 1.3' определяется формулой [14]

$$u(x,y)=\int_0^1\tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi+$$

$$+\int_0^y\mu_1(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\mu(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta, \tag{18}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}}-e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}}\right].$$

Удовлетворяя эту функцию условию (2), имеем

$$\int_0^1 dx\int_0^y\mu(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta+\int_0^y p\left(t,y\right)\mu(\eta)d\eta=\mu_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{19}$$

где $\mu_3(y)=\mu_1\left(y\right)+\int_0^1\left\{\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi+\int_0^y\mu_1(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta\right\}dx$

Меняя порядок интегрирования в левой части равенства (19) и учитывая равенство

$$\int_0^1 G_\xi(x,y;1,\eta)dx=-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+K_0\left(y,\eta\right), \tag{20}$$

где

$$K_0\left(y,\eta\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(2n-1)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{n^2}{y-\eta}\right]\right\}, \tag{21}$$

имеет интегральное Вольтерра первого рода

$$\int_0^y\frac{\mu(\eta)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}d\eta=\mu_4\left(y\right),\quad 0\le y\le 1, \tag{22}$$

где $\mu_4(y,\eta)=\int_0^y\left[p\left(\eta,y\right)+K_0\left(y,\eta\right)\right]\mu\left(\eta\right)d\eta-\mu_3\left(y\right)$.

Считая временно известной правую часть равенства (21) и обращая его как интегральное уравнение Абеля относительно $\mu(y)$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода вида

$$\mu(y) - \int_0^y K(y,\eta)\mu(\eta)d\eta = g_1(y),\ 0 \le y \le 1, \tag{23}$$

где

$$K(y,\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy}\int_\eta^y \frac{k(t,\eta)}{\sqrt{y-t}}dt,\quad g_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{g(t)}{\sqrt{y-t}}dt.$$

Отсюда видно, что ядро $K(y,\eta)$ имеет слабую особенность. Пользуясь свойствами функций $\tau(x)$, $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$, нетрудно убедиться, что правая часть уравнения (23) непрерывна на [0,1]. Поэтому уравнение (23) имеет единственное решение в классе непрерывных функций. Решая его, находим функцию $\mu(y)$ и, тем самым, функцию $u(x,y)$ в области D_1. Функция $u(x,y)$ в области D_2 определяется формулой (7), причем здесь $\nu(x)$ – функция, определяемая равенством (9).

Аналогично исследуется задача 2.

Литература:

1. Cannon J.R. The solution of heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Math. 1963, vol. 21, no.2.

2. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т.4. №6. –С.1006–1024. (Kamynin L.I. A boundary-value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 1964. Vol. 4. No. 6, –pp. 1006 – 1024.)

3. Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для параболического уравнения // Матем. заметки. – 1993. Т.54. №4. –С.98–116. (Muravei L.A., Filinovskii A.V. On the non-local boundary-value problem for a parabolic equation // Mathematical Notes. – 1993. Vol.54. No.4, –pp.98–116.)

4. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. Т.13. №2. – С.294–304. (Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition // Differential Equations. – 1977. Vol.13. No. 2, – pp. 294–304.)

5. Голованчиков А.Б., Симонова И.Э., Симонов Б.В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. – 2001. Т.7. №2. – С.339-349. (Golovanchikov A.B., Simonova I.E., Simonov B.V. The solution of diffusion problem with integral boundary condition // Fundam. Prikl. Mat. – 2001. Vol. 7. No. 2, – pp. 339 – 349.)

6. Urinov A.K., Nishonova Sh.T. A problem with integral conditions for an elliptic-parabolic equation // Mathematical Notes. – 2017. Vol.102. No. 1, –pp. 68 – 80.

7. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Задачи с интегральным условием для пароболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник НУУз. – 2017. № 2/2. – С. 227–238. (Urinov A.K., Mamanazarov A.O. Problems with an integral condition for a parabolic-hyperbolic equation with a non-characteristic line of change of type // Vestnik Natsional'nogo Universiteta Uzbekistana. – 2017. No. 2/2, – pp. 227 – 238.)

8. Уринов А.К., Халилов К.С. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболических уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2013. Т. 15. № 1. – С. 24-30. (On a nonlocal problem for parabolic-hyperbolic equations // Dokl. Adyg. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk. – 2013. Vol. 15. No.1, – pp. 24–30.)

9. Уринов А.К., Халилов К.С. О некоторых неклассических задачах для одного класса параболо-гиперболических уравнений // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2014. Т.16. №4. – С. 42–49. (Urinov A.K., Khalilov K.S. Some nonclassial problems for a class parabolic-hyperbolic equations // Dokl. Adyg. (Cherkessk.) Mezhdun. Akad. Nauk. – 2014. Vol.16, No. 4, 42–49.)

10. Уринов А.К., Халилов К.С. Нелокальные задачи с интегральным условием для параболо-гиперболического уравнения // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – 2014. № 2. – С. 6-9. (Urinov A.K., Khalilov K.S. Non-local problems for of parabolic-hyperbolic equation with a integral boundary condition // Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb. – 2014. № 2. – pp. 6–9.)

11. Уринов А.К. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Узбекский математический журнал. – 2005. №1. – С.70-78. (Urinov A.K. Eigenvalue problems for a mixed type equation with a singular coefficient // Uzbek mathematical journal. – 2005. №1. – pp.70–78.)

12. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.:Высшая школа, 1985. – 304 с. (Smirnov M.M. Mixed type equation. – Moscow, Vysshaya Shkola. 1985. 304 p.)

13. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. – Ташкент: Фан, 1997. 165с. (Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. Boundary value problems for the mixed type equations with spectral parameter. –Tashkent, Fan. 1997. 165 p.)

14. Джураев Т.Д., Сопуев А.С., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. 220с. (Dzhuraev T.D., Sopuev A., Mamazhanov M. Boundary value problems for equations of parabolic-hyperbolic type. – Tashkent, Fan. 1986. 220 p.)