O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

2-2022

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК.ФЕРГУ

Muassis: Farg‘ona davlat universiteti.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» “Scientific journal of the Fergana State University” jurnali bir yilda olti marta elektron shaklda nashr etiladi.

Jurnal filologiya, kimyo hamda tarix fanlari bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnaldan maqola ko‘chirib bosilganda, manba ko‘rsatilishi shart.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan 2020 yil 2 sentabrda 1109 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Muqova dizayni va original maket FarDU tahririy-nashriyot bo‘limida tayyorlandi.

Tahririyat manzili:
150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.
Tel.: (0373) 244-44-57. Mobil tel.: (+99891) 670-74-60
Sayt: www.fdu.uz. Jurnal sayti

Bosishga ruxsat etildi:
Qog‘oz bichimi: - 60×84 1/8
Bosma tabog‘i:
Ofset bosma: Ofset qog‘ozi.
Adadi: 10 nusxa
Buyurtma №
FarDU nusxa ko‘paytirish bo‘limida chop etildi.
Manzil: 150100, Farg‘ona sh., Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.

Farg‘ona,
2022.

ADABIYOTSHUNOSLIK

TILSHUNOSLIK

MATEMATIKA

MATEMATIKA

UDK: 517.956 **DOI:** 10.56292/SJFSU/vol28_iss2/a42

YUQORI JUFT TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN TO'G'RI TO'RTBURCHAKDA BOSHLANG'ICH-CHEGARAVIY MASALA

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

AN INITIAL BOUNDARY PROBLEM FOR A HIGHER EVEN ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN A RECTANGLE

Уринов Ахмаджон Кушакович[1]**, Азизов Музаффар Сулаймонович**[2]

[1]Уринов Ахмаджон Кушакович − *д.ф.м.н., профессор, ФерГУ*
[2]Азизов Музаффар Сулаймонович − *докторант, ФерГУ*

Annotatsiya

Ushbu maqolada to'g'ri to'rtburchakda Bessel operatori qatnashgan yuqori juft tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masala o'rganilgan. Qo'yilgan masalaga o'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llab, yuqori juft tartibli oddiy differensial tenglama uchun spektral masala olingan. Oxirgi masala o'z-o'ziga qo'shma ekanligi isbotlanib, uning xos funksiyalari sistemasi mavjudligi, shuningdek, ushbu sistema ortonormalligi va to'laligini ko'rsatilgan. O'rganilayotgan masalaning yechimi spektral masalaning xos funksiyalari sistemasi bo'yicha Fury'e qatori ko'rinishida qidirilgan. Bu qatorning va undan hadlab differensiallash yo'li bilan olingan qatorlarning tekis yaqinlashuvchiligini ta'minlovchi shartlar topilgan. Masalani yechishning yagonaligi energiya integrali usuli bilan isbotlangan. Masala yechimi uchun uning berilgan funksiyalarga uzluksiz bog'liq ekanligi kelib chiqaruvchi bahosi olingan.

Аннотация

В данной статье, для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике, сформулирована начально-граничная задача. Применяя метод разделения переменных к поставленной задаче, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого четного порядка. Доказана самосопряженность последней задачи, откуда следует существование системы её собственных функций, а также ортонормированность и полнота этой системы. Решение изучаемой задачи найдено в виде суммы ряда Фурье, по системе собственных функций спектральной задачи. Доказана равномерная сходимость этого ряда, а также рядов, полученных из него почленным дифференцированием. Методом энергии интегралов доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Abstract

In this article, for a partial differential equation of high even order with a Bessel operator in a rectangle, an initial boundary value problem has been formulated. Applying the method of separation of variables to the considered problem, a spectral problem was obtained for an ordinary differential equation of high even order. A self-adjointness of the last problem was proved, which implies the existence of the system of its eigen-functions, as well as the orthonormality and completeness of this system. The solution of the considered problem study was found as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigen-functions of the spectral problem. The uniform convergence of this series, as well as the series obtained from it by term-by-term differentiation, have been proved. The uniqueness of the solution of the problem has been proved by the method of energy of integrals. An estimate for solution of the problem was obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Kalit so'zlar: *boshlang'ich-chegaraviy masala, spektral masala, masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va turg'unligi, o'zgaruvchilarni ajratish usuli.*

Ключевые слова: *начально-граничная задача, спектральная задача, существование, единственность и устойчивость решения, метод разделения переменных.*

Keywords. *initial-boundary value problem, spectral problem, the existence, uniqueness and stability of the solution, the method of separation of variables.*

1. Введение. Постановка задачи

Известно, что в связи с многочисленными приложениями в науке и технике теория дифференциальных уравнений в частных производных развивается быстрыми темпами. В частности, к уравнениям высокого четного порядка приводятся многие задачи колебания стержня, пластин, балок и т.д. [1-2]. В настоящее время имеются многочисленные научные работы, в которых сформулированы и изучены начальные и начально - граничные задачи для уравнений высокого четного порядка. В частности, в работах [3-5] в прямоугольной области для таких уравнений исследованы начально-граничные задачи, а в работе [6] изучена задача Дирихле в прямоугольнике и в параллелепипеде. В статье [7] в прямоугольной области исследована спектральная задача, а в статье [8] в квадрате рассмотрена краевая задача для вырождающегося уравнения на границе области. В работе [9] в четырехугольнике $\{(x,t):0<x<l,-T<t<T\}$ исследована краевая задача для вырождающегося параболического уравнения с меняющимся направлением времени. В работах [10]-[12] для некоторых уравнений высокого четного порядка, содержащих производные Римана-Лиувилля по t от искомой функции, в прямоугольной области исследованы задачи с нелокальными условиями на боковых стронах прямоугольника. В работе [13] в многомерной области с достаточно гладкой границей для гиперболических уравнений с произвольным положительным формально самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором четного порядка, а в [14] для аналогичного уравнения, содержащего дифференциальный оператор Римана-Лиувилля дробного порядка по t от искомой функции, изучены начально-граничные задачи. В работах [15-19] исследована задача Коши в верхней полуплоскости для уравнений высокого четного порядка с оператором Бесселя.

В настоящей работе в области $\Omega=\{(x,t):0<x<1;0<t<T\}$ рассмотрим следующее уравнение высокого четного порядка вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left((-1)^s\frac{\partial^{2s}u}{\partial x^{2s}}\right)+(-1)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}=f(x,t) \tag{1}$$

и исследуем существование, единственность и устойчивость решения следующей задачи, где γ, s, k, T -заданные действительные числа, причем $\gamma\in[0,1/2)$, $s,k\in N,\ \ s<k,$ $T>0$, а $f(x,t)$ - заданная функция.

Задача 1. *Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $\dfrac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}\in C(\overline{\Omega}),\ \dfrac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\in C(\Omega);\ t^{2\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial t}\in C(\overline{\Omega}),\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}+\dfrac{2\gamma}{t}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial^{2s}u}{\partial x^{2s}}\in C(\Omega);$

2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1)*;*

3) удовлетворяет следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\qquad \lim_{t\to 0}t^{2\gamma}u_t(x,t)=\varphi_2(x),\quad 0\le x\le 1; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial x^{2j}}u(0,t)=0,\quad \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}}u(1,t)=0,\ j=\overline{0,k-1},\ 0\le t\le T, \tag{3}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$- заданные непрерывные функции, причем $\varphi_1^{(2j)}(0)=0,\ \varphi_1^{(2j+1)}(1)=0,$ $\varphi_2^{(2j)}(0)=0,\ \varphi_2^{(2j+1)}(1)=0,\ j=\overline{0,k-1}$.

Задача 1 при $s=0$ исследована в работе [20], а в работе [21] для уравнения (1) при $s=0$ в области Ω исследована задача с нелокальными условиями, в частном случае из которого следуют условия (5). В работе [22] в области Ω для уравнения (1) при $s=0$ исследована задача с условиями $\left(\partial^j/\partial x^j\right)u(0,t)=0,$ $\left(\partial^{k+j}/\partial x^{k+j}\right)u(1,t)=0,$ $j=\overline{0,k-1},\ 0\le t\le T.$

2. Исследование спектральной задачи

Нетривиальные функции, удовлетворяющие уравнению (1) при $f(x,t)\equiv 0$ и условиям (3), ищем в виде $u(x,t)=v(x)T(t)$. В результате, относительно функции $v(x)$ получим следующую спектральную задачу:

$$Mv\equiv(-1)^k v^{(2k)}(x)=\lambda(-1)^s v^{(2s)}(x),\quad 0<x<1; \tag{4}$$

$$v^{(2j)}(0)=0,\quad v^{(2j+1)}(1)=0,\quad j=\overline{0,k-1}; \tag{5}$$

$$v(x)\in C^{2k-1}[0,1]\cap C^{2k}(0,1),\quad v^{(2k)}(x)\in L_2(0,1).$$

Нетрудно убедиться, что задача $\{(4),(5)\}$ при $\lambda=0$ самосопряженная.

Лемма 1. *Если существует собственное значение задачи* $\{(4),(5)\}$ *, то оно положительно.*

Доказательство. Пусть $v(x)\not\equiv 0$ - есть собственная функция задачи $\{(4),(5)\}$, соответствующая собственному значению λ. Интегрируя равенство (4) $2s$ раз и учитывая условия (5), получим

$$(-1)^{k-s} v^{(2k-2s)}(x)=\lambda v(x),\qquad 0<x<1. \tag{6}$$

Умножим последнее уравнение на функцию $v(x)$, а затем проинтегрируем по x на отрезке $[0,1]$:

$$(-1)^{k-s}\int_0^1 v^{(2k-2s)}(x)v(x)dx=\lambda\int_0^1 v^2(x)dx.$$

Применим правило интегрирования по частям $k-s$ раз к первому интегралу:

$$(-1)^{k-s}\left[v^{(2k-2s-1)}(x)v(x)-v^{(2k-2s-2)}(x)v'(x)+....+(-1)^{k-s-1}v^{(k-s)}(x)v^{(k-s-1)}(x)\right]\Big|_0^1+$$

$$+(-1)^{2k-2s}\int_0^1\left[v^{(k-s)}(x)\right]^2dx=\lambda\int_0^1 v^2(x)dx.$$

В силу условия (5), из последнего следует равенство

$$\int_0^1\left[v^{(k-s)}(x)\right]^2dx=\lambda\int_0^1 v^2(x)dx.$$

Так как $\int_0^1 v^2(x)dx\neq 0$, то отсюда следует, что $\lambda\geq 0$.

Предположим, что $\lambda=0$. Тогда уравнение (4) принимает вид $v^{(2k)}(x)=0$, $0<x<1$. Общее решение этого уравнения определяется равенством

$$v(x)=c_1\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+c_2\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}+...+c_{2k-2}\frac{x^2}{2!}+c_{2k-1}\frac{x}{1!}+c_{2k}, \tag{7}$$

где $c_j,\ j=\overline{1,2k}$ – произвольные постоянные. Подчиняя эту функцию условиям (5), получим $c_j=0$, $j=\overline{1,k}$. Тогда $v(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$. Следовательно, $\lambda>0$.

Лемма 1 доказана.

Так как $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи {(4),(5)}, то существует единственная симметричная функция Грина этой задачи. Полагая $\lambda > 0$ и принимая во внимание вид (7) общего решения уравнения $Mv = 0$, функцию Грина задачи $\{(4),(5)\}$ ищем в виде

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1 \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + a_2 \dfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + ... + a_k \dfrac{x^k}{k!} + ... + a_{2k-1} \dfrac{x}{1!} + a_{2k}, & 0 \le x \le s, \\ b_1 \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + b_2 \dfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + ... + b_k \dfrac{x^k}{k!} + ... + b_{2k-1} \dfrac{x}{1!} + b_{2k}, & s \le x \le 1, \end{cases} \quad (8)$$

где a_j и b_j, $j = \overline{1,2k}$ неизвестные функции, зависящие от переменной s, которые подлежат определению.

Функция Грина $G(x,\xi)$ должна удовлетворить следующим условиям:

1.Как функция переменного x при любых $\xi \in (0,1)$ удовлетворяет условиям (5);

2.На каждом из интервалов $(0,\xi)$ и $(\xi,1)$ существуют непрерывные производные $\left(\partial^j / \partial x^j\right) G(x,\xi)$, $j = \overline{1,2k}$, причем

а) $G(x,\xi)$ и $\left(\partial^j / \partial x^j\right) G(x,\xi)$, $j = \overline{1,2k-2}$ непрерывны при $x = \xi$;

б) $\left(\partial^{2k-1} / \partial x^{2k-1}\right) G(x,\xi)$ при $x = \xi$ имеет скачок $(-1)^k$, т.е.

$$\left(\partial^{2k-1} / \partial x^{2k-1}\right) G(\xi+0,\xi) - \left(\partial^{2k-1} / \partial x^{2k-1}\right) G(\xi-0,\xi) = (-1)^k;$$

в) $\left(\partial^{2k} / \partial x^{2k}\right) G(x,\xi) = 0$ при $x \in (0,\xi) \cup (\xi,1)$.

Удовлетворяя функцию (8) свойствам 2.а) и 2.б) функции Грина, получаем следующую систему уравнений относительно $b_j - a_j$, $j = 1,2k$:

$$b_1 - a_1 = (-1)^k, \quad \sum_{j=0}^{2k-1-m} \frac{\xi^j}{j!} \left(b_{2k-m-j} - a_{2k-m-j}\right) = 0, \; m = \overline{0,2k-2}.$$

Единственное решение этой системы уравнений определяется в виде:

$$b_j - a_j = (-1)^{k+j-1} \xi^{j-1} \big/ (j-1)!, \quad j = \overline{1,2k}. \quad (9)$$

Подчиняя функцию (8) граничным условиям (5), получим следующую систему уравнений относительно $a_{2j}, j = \overline{1,k}$ и $b_m, m = \overline{1,2k-1}$:

$$\left\{ a_{2j} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{2j-1} \frac{b_n}{(2j-1-n)!} = 0, \qquad j = \overline{1,k}. \right.$$

Из последней системы, с учетом равенств (9), однозначно находим a_j и b_j:

$$a_1 = -(-1)^k, \; a_3 = (-1)^k \frac{\xi}{1!1!} - (-1)^k \frac{\xi^2}{2!}; \qquad b_1 = 0, \; b_3 = (-1)^k \frac{\xi}{1!1!}, \quad (10)$$

$$a_{2j} = 0, \qquad b_{2j} = -(-1)^k \xi^{2j-1} \big/ (2j-1)!, \qquad j = \overline{1,k}; \quad (11)$$

$$\begin{cases} b_{2j-1} = \sum\limits_{n=1}^{j-1} \dfrac{(-1)^k \xi^{2n-1}}{(2n-1)!\left(2j-3-(2n-2)\right)!} + \sum\limits_{n=1}^{j-2} \dfrac{b_{2n+1}}{\left(2j-4-(2n-2)\right)!}, \\ a_{2j-1} = \sum\limits_{n=1}^{j-1} \dfrac{(-1)^k \xi^{2n-1}}{(2n-1)!\left(2j-3-(2n-2)\right)!} - \sum\limits_{n=1}^{j-2} \dfrac{b_{2n+1}}{\left(2j-4-(2n-2)\right)!} - \\ \qquad -(-1)^k \dfrac{\xi^{2j-2}}{(2j-2)!}, \quad j=\overline{3,k}. \end{cases} \tag{12}$$

Подставляя (10)-(12) в (8), находим функцию Грина задачи $\{(4),(5)\}$ в виде:

$$G(x,\xi) =$$

$$= \begin{cases} -(-1)^k \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \left[\dfrac{\xi}{1!1!} - \dfrac{\xi^2}{2!}\right] \dfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \\ + \sum\limits_{j=3}^{k} \left[\sum\limits_{n=1}^{j-1} \dfrac{(-1)^k \xi^{2n-1}}{(2n-1)!\left(2j-3-(2n-2)\right)!} - \sum\limits_{n=1}^{j-2} \dfrac{b_{2n+1}}{\left(2j-4-(2n-2)\right)!} - \right. \\ \left. -(-1)^k \dfrac{\xi^{2j-2}}{(2j-2)!} \right] \dfrac{x^{2k+1-2j}}{(2k+1-2j)!}, & 0 \le x < \xi, \\ \sum\limits_{j=3}^{k} \left[\sum\limits_{n=1}^{j-1} \dfrac{(-1)^k \xi^{2n-1}}{(2n-1)!\left(2j-3-(2n-2)\right)!} + \sum\limits_{n=1}^{j-2} \dfrac{b_{2n+1}}{\left(2j-4-(2n-2)\right)!} \right] \dfrac{x^{2k+1-2j}}{(2k+1-2j)!} + \\ + (-1)^k \dfrac{\xi}{1!1!} \dfrac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} - \sum\limits_{j=1}^{k} (-1)^k \dfrac{\xi^{2j-1}}{(2j-1)!} \dfrac{x^{2k-2j}}{(2k-2j)!}, & \xi < x \le 1. \end{cases} \tag{13}$$

Пользуясь свойствами функции $G(x,\xi)$, нетрудно доказать, что задача $\{(4),(5)\}$ эквивалентна следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$v(x) = (-1)^s \lambda \int_0^1 G(x,\xi) v^{(2s)}(x) d\xi. \tag{14}$$

Интегрируя по частям s раз правую часть уравнения (14) и учитывая свойства функций $G(x,\xi)$ и $v(x)$, приходим к равенству

$$v(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\partial^s G(x,\xi)}{\partial \xi^s} v^{(s)}(\xi) d\xi. \tag{15}$$

В силу непрерывности функции $\left(\partial^{2s} / \partial x^s \partial \xi^s\right) G(x,\xi), \quad j=\overline{1,s}$, справедливо равенство

$$v^{(s)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\partial^{2s} G(x,\xi)}{\partial x^s \partial \xi^s} v^{(s)}(\xi) d\xi, \ \ x \in (0,1). \tag{16}$$

Отсюда, введя обозначения $v^{(s)}(x)=\theta(x)$, $K(x,\xi)=\left(\partial^{2s}/\partial x^s\partial\xi^s\right)G(x,\xi)$, приходим к интегральному уравнению вида, эквивалентному задаче {(4),(5)}:

$$\theta(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\xi)\theta(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Так как $G(x,\xi)$-есть функция Грина самосопряженной задачи, то она симметрична. Тогда функция $K(x,\xi)$ также симметрична. Легко видеть, что $K(x,\xi)\in C(\overline{\Omega})$. Следовательно, (17)-есть интегральное уравнение с непрерывным симметричным ядром. Тогда, согласно теории интегральных уравнений, уравнение (17) имеет счетное число собственных значений

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n<\ldots, \tag{18}$$

$\lambda_n\to+\infty$, при $k\to\infty$, а соответствующие им собственные функции

$$\theta_1(x),\ \theta_2(x),\ldots,\theta_n(x),\ldots,\ \text{т.е. } v_1^{(s)}(x),\ v_2^{(s)}(x),\ldots,v_n^{(s)}(x),\ldots \tag{19}$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ и любая функция, представимая через ядро: $g(x)=\int_0^1 K(x,\xi)h(\xi)d\xi,$ где $h(x)\in L_2(0,1)$, разлагается в ряд Фурье $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\theta_k(x)$, где $c_k=\int_0^1 g(x)\theta_k(x)dx$, который на интервале $[0,1]$ сходится абсолютно и равномерно [24].

В силу эквивалентности задачи {(4),(5)} и интегрального уравнения (16), из доказанного выше следует, что числа (18) являются собственными значениями, а функции

$$v_1(x),\ v_2(x),\ldots,v_n(x),\ldots \tag{20}$$

- собственными функциями задачи {(4),(5)}.

3. Вспомогательные утверждения

Сформулируем и докажем некоторые леммы, которые используются при доказательстве существования решения задачи 1.

Лемма 2. *Пусть* $g(x)\in C^{(2k-1)}[0,1]\cap C^{(2k)}(0,1)$, $g^{(2k)}(x)\in L_2(0,1)$ *и удовлетворяет условиям* (5). *Тогда функция* $g(x)$ *разлагается в ряд Фурье*

$$g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k v_k(x) \tag{21}$$

по собственным функциям (20) *задачи* {(4),(5)}, *который сходится абсолютно и равномерно на интервале* [0,1], *где*

$$g_k=\int_0^1 g(x)v_k^{(s)}(x)dx. \tag{22}$$

Доказательство. В силу условий, наложенных на функции $g(x)$, и свойства функции $G(x,\xi)$, справедливо равенство

$$g(x)=(-1)^k\int_0^1 G(x,\xi)g^{(2k)}(\xi)d\xi.$$

Применяя правило интегрирования по частям s раз к интегралу, стоящему в правой части, и учитывая свойства функций $g(x)$ и $G(x,\xi)$, имеем

$$g(x)=(-1)^{k-s}\int_0^1 \frac{\partial^s}{\partial\xi^s}G(x,\xi)g^{(2k-s)}(\xi)d\xi.$$

Принимая во внимание, что производная $\left(\partial^{2s}/\partial x^s\partial\xi^s\right)G(x,\xi)$ существует и непрерывна на $\{(x,\xi):0\le x,\xi\le 1\}$, дифференцируем последнее равенство по x s раз. В результате, с учетом обозначения $K(x,\xi)=\left(\partial^{2s}/\partial x^s\,\partial\xi^s\right)G(x,\xi)$, получим

$$g^{(s)}(x)=\int_0^1 K(x,\xi)\left[(-1)^{k-s}g^{(2k-s)}(\xi)\right]d\xi.$$

Отсюда, в силу $(-1)^{k-s}g^{(2k-s)}(x)\in L_2(0,1)$, следует, что функция $g^{(s)}(x)$ представима через ядро $K(x,\xi)$. Тогда она может быть разложена в ряд

$$g^{(s)}(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}g_k v_k^{(s)}(x) \tag{23}$$

по собственным функциям (19) ядра $K(x,\xi)$.

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на интервале [0,1]. Интегрируя ряд (23) s раз, с учетом свойства функций $g(x)$ и $v(x)$, приходим к равенству (21). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Следующие ряды равномерно сходятся на интервале* $[0,1]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[\left(v_n^{(\mu)}(x)\right)\right]^2}{\lambda_n^2},\ \mu=\overline{1,2k-1},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[v^{(2s)}(x)\right]^2}{\lambda_n}, \tag{24}$$

где λ_n *и* $v_n(x)$, $n\in N$ *-собственные значения* (18) *и собственные функции* (20).

Доказательство. Рассмотрим неотрицательное выражение вида

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k}-\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n(x)v_n^{(k)}(\xi)}{\lambda_n}\right]^2 d\xi\ge 0.$$

Его можно переписать в виде

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k}\right]^2 d\xi-2\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n(x)}{\lambda_n}\int_0^1\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k}v_n^{(k)}(\xi)d\xi+$$
$$+\sum_{n,l=1}^{m}\frac{v_n(x)v_l(x)}{\lambda_n\lambda_l}\int_0^1 v_n^{(k)}(\xi)v_l^{(k)}(\xi)d\xi\ge 0,\quad \mu=\overline{0,k-1}. \tag{25}$$

Учитывая свойства функций $G(x,\xi)$, $v_k(\xi)$ и равенство (14), имеем

$$\int_0^1\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k}v_n^{(k)}(\xi)ds=\left[\frac{\partial^{k-1}G(x,\xi)}{\partial\xi^{k-1}}v_n^{(k)}(\xi)-\right.$$

$$-\frac{\partial^{k-2}G(x,\xi)}{\partial\xi^{k-2}}v_n^{(k+1)}(\xi)+...+(-1)^{k-1}G(x,\xi)v_n^{(2k-1)}(\xi)\Bigg]_{\xi=0}^{\xi=1}+$$

$$+(-1)^k\int_0^1 G(x,\xi)v_n^{(2k)}(\xi)d\xi=\lambda_n\int_0^1 G(x,\xi)(-1)^s v^{(2s)}(x)d\xi=v_n(x). \qquad (26)$$

Далее,

$$\int_0^1 v_n^{(k)}(\xi)v_l^{(k)}(\xi)d\xi=(-1)^k\int_0^1 v_n^{(2k)}(\xi)v_l(\xi)d\xi=$$

$$=\lambda_n\int_0^1(-1)^s v^{(2s)}(x)v_l(\xi)d\xi=\lambda_n\int_0^1 v_n^{(s)}(\xi)v_l^{(s)}(\xi)d\xi=\begin{cases}\lambda_n, & n=l,\\ 0, & n\neq l.\end{cases} \qquad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в равенство (25), получим

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k}\right]^2 d\xi-\sum_{n=1}^m\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\geq 0.$$

Так как это неравенство имеет место $\forall m\in N$ и $\left(\partial^k/\partial\xi^k\right)G(x,\xi)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, то

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\leq\int_0^1\left[\frac{\partial^k G(x,\xi)}{\partial\xi^k}\right]^2 d\xi\leq C_1=const<+\infty. \qquad (28)$$

Следовательно, ряд в (28), т.е. первый ряд в (24) сходится равномерно.

Примененным выше методом, равномерная сходимость второго и третьего ряда в (24) доказывается с помощью следующих неотрицательных выражений, соответственно:

$$\int_0^1\left\{\frac{\partial^{\mu+s}G(x,\xi)}{\partial x^\mu\partial\xi^s}-\sum_{n=1}^m\frac{v_n^{(\mu)}(x)v_n^{(s)}(\xi)}{\lambda_n}\right\}^2 d\xi\geq 0,\quad \mu=\overline{1,2k-1};$$

$$\int_0^1\left\{\frac{\partial^{2s+k}G(x,\xi)}{\partial x^{2s}\partial\xi^k}-\sum_{n=1}^m\frac{v_n^{(2s)}(x)v_n^{(k)}(\xi)}{\lambda_n}\right\}^2 d\xi\geq 0.$$

Лемма 3 доказана. W

Лемма 4. *Пусть* $\varphi^{(2k-s-1)}(x)\in C[0,1],\ \varphi^{(2k-s)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и выполнена одна из следующих групп условий:*

I. *При* s *-нечетное число*

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^{(s+1)}(0)=0,\ \varphi^{(s+3)}(0)=0,...,\ \varphi^{(2k-s-1)}(0)=0,\\ &\varphi^{(s)}(1)=0,\ \varphi^{(s+2)}(1)=0,...,\ \varphi^{(2k-s-2)}(1)=0;\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

II. *При* s *-четное число*

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^{(s)}(0)=0,\ \varphi^{(s+2)}(0)=0,...,\ \varphi^{(2k-s-2)}(0)=0,\\ &\varphi^{(s+1)}(1)=0,\ \varphi^{(s+3)}(1)=0,...,\ \varphi^{(2k-s-1)}(1)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2\varphi_n^2 \le \int_0^1\left[(-1)^{k-s}\,\varphi^{(2k-s)}(x)\right]^2dx,$$

где $\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x)v_n^{(s)}(x)dx$, *где* $v_n(x)$ *- функции* (20).

Доказательство. Из уравнения (4) следует, что справедливо равенство

$$(-1)^k v_n^{(2k-s)}(x) = \lambda_n(-1)^s v_n^{(s)}(x). \quad (31)$$

Согласно формуле для φ_n, имеет место равенство

$$\lambda_n\varphi_n = \lambda_n\int_0^1\varphi^{(s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx,$$

откуда, в силу равенства (31), получаем

$$\lambda_n\varphi_n = (-1)^{k-s}\int_0^1\varphi^{(s)}(x)v_n^{(2k-s)}(x)dx.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2k-2s$ раз, получим

$$\lambda_n\varphi_n = (-1)^{k-s}\int_0^1\varphi^{(s)}(x)v_n^{(2k-s)}(x)dx =$$

$$=(-1)^{k-s}\left\{\varphi^{(s)}(x)v_n^{(2k-s-1)}(x)-\varphi^{(s+1)}(x)v_n^{(2k-s-2)}(x)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+(-1)^{2k-2s-1}\varphi^{(2k-s-1)}(x)v_n^{(s)}(x)\right\}\Big|_0^1+(-1)^{k-s}\int_0^1\varphi^{(2k-s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx.$$

В силу условий леммы 4, последнее равенство записывается в виде

$$\lambda_n\varphi_n = (-1)^{k-s}\int_0^1\varphi^{(2k-s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx.$$

Так как $\left\{v_n^{(s)}(x)\right\}_{n=1}^{+\infty}$-ортонормальная система, то из последнего равенства следует, что $\lambda_n\varphi_n$ является коэффициентом Фурье функции $(-1)^{k-s}\,\varphi^{(2k-s)}(x)$ по системе $\left\{v_n^{(s)}(x)\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

Поэтому согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2\varphi_n^2 \le \int_0^1\left[\varphi^{(2k-s)}(x)\right]^2dx \le C_2 = \text{const} < +\infty.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi^{(3k-2s-1)}(x)\in C[0,1]$, $\varphi^{(3k-2s)}(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и выполнена одна из следующих групп условый:*

I. *При* s *и* k *-нечетные числа*

условия (29) *и* $\begin{cases}\varphi^{(2k-s+1)}(0)=0,\ \varphi^{(2k-s+3)}(0)=0,\dots,\varphi^{(3k-2s-1)}(0)=0,\\ \varphi^{(2k-s)}(1)=0,\ \varphi^{(2k-s+2)}(1)=0,\dots,\varphi^{(3k-2s-2)}(1)=0.\end{cases}$

II. *При* s *-нечетное число, а* k *-четное число* *условия* (29) *и* $\begin{cases} \varphi^{(2k-s+1)}(0)=0,\ \varphi^{(2k-s+3)}(0)=0,\ldots,\varphi^{(3k-2s-2)}(0)=0, \\ \varphi^{(2k-s)}(1)=0,\ \varphi^{(2k-s+2)}(1)=0,\ldots,\varphi^{(3k-2s-1)}(1)=0. \end{cases}$

III. *При* s *и* k *-четные числа*

условия (30) *и* $\begin{cases} \varphi^{(2k-s)}(0)=0,\ \varphi^{(2k-s+2)}(0)=0,\ldots,\varphi^{(3k-2s-2)}(0)=0, \\ \varphi^{(2k-s+1)}(1)=0,\ \varphi^{(2k-s+3)}(1)=0,\ldots,\varphi^{(3k-2s-1)}(1)=0. \end{cases}$

IV. *При* s *-четное число, а* k *-нечетное число*

условия (30) *и* $\begin{cases} \varphi^{(2k-s)}(0)=0,\ \varphi^{(2k-s+2)}(0)=0,\ldots,\varphi^{(3k-2s-1)}(0)=0, \\ \varphi^{(2k-s+1)}(1)=0,\ \varphi^{(2k-s+3)}(1)=0,\ldots,\varphi^{(3k-2s-2)}(1)=0. \end{cases}$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3\varphi_n^2 \le \int_0^1\left\{\varphi^{(3k-2s)}(x)\right\}^2 dx.$$

Доказательство. Согласно формуле для φ_n, имеет место равенство

$$\sqrt{\lambda_n^3}\varphi_n = \sqrt{\lambda_n^3}\int_0^1\varphi^{(s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx.$$

Отсюда, согласно (31), заменим $\lambda_n v_n^{(s)}(x)$ на $(-1)^{k-s}\,v_n^{(2k-s)}(x)$, а затем применим правило интегрирования по частям $2k-2s$ раз:

$$\sqrt{\lambda_n^3}\varphi_n = (-1)^{k-s}\sqrt{\lambda_n}\int_0^1\varphi^{(s)}(x)v_n^{(2k-s)}(x)dx =$$

$$=(-1)^{k-s}\sqrt{\lambda_n}\left\{\varphi^{(s)}(x)v_n^{(2k-s-1)}(x)-\varphi^{(s+1)}(x)v_n^{(2k-s-2)}(x)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{2k-2s-1}\varphi^{(2k-s-1)}(x)v_n^{(s)}(x)\right\}\Big|_0^1+(-1)^{k-s}(-1)^{2k-2s}\sqrt{\lambda_n}\int_0^1\varphi^{(2k-s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx.$$

Следовательно, справедливо следующее равенство

$$\lambda_n^{3/2}\varphi_n = (-1)^{k-s}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1\varphi^{(2k-s)}(x)\lambda_n v_n^{(s)}(x)dx.$$

Заменяя ещё раз $\lambda_n v_n^{(s)}(x)$ на $(-1)^{k-s}\,v_n^{(2k-s)}(x)$, а затем применяя правило интегрирования по частям $k-s$ раз, получим

$$\lambda_n^{3/2}\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^1\varphi^{(2k-s)}(x)v_n^{(2k-s)}(x)dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\left\{\varphi^{(2k-s)}(x)v_n^{(2k-s-1)}(x)-\varphi^{(2k-s+1)}(x)v_n^{(2k-s-2)}(x)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{k-s-1}\varphi^{(3k-2s-1)}(x)v_n^{(k)}(x)\right\}\Big|_0^1+(-1)^{k-s}\int_0^1\varphi^{(3k-2s)}(x)\frac{v_n^{(k)}(x)}{\sqrt{\lambda_n}}dx,$$

т.е.

$$\lambda_n^{3/2}\varphi_n = (-1)^{k-s}\int_0^1 \varphi^{(3k-2s)}(x)\frac{v_n^{(k)}(x)}{\sqrt{\lambda_n}}dx. \qquad (32)$$

Пользуясь равенством (27), нетрудно убедиться, что система $\left\{v_n^{(k)}(x)\Big/\sqrt{\lambda_n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ ортонормальна. Тогда из равенства (32) следует, что $\lambda_n^{3/2}\varphi_n$ является коэффициентом Фурье функции $(-1)^{k-s}\varphi^{(3k-2s)}(x)$ по системе $\left\{v_n^{(k)}(x)\Big/\sqrt{\lambda_n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

Поэтому, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3\varphi_n^2 \le \int_0^1\left\{\varphi_1^{(3k-2s)}(x)\right\}^2 dx \le C_3 = \text{const} < +\infty.$$

Лемма 5 доказана.

Теперь введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} f_j(x,t) = \begin{cases} \int_0^x f_{j-1}(\xi,t)d\xi, & \text{если } j-\text{четное число}, \quad j=\overline{1,s}, \\ \int_1^x f_{j-1}(\xi,t)d\xi, & \text{если } j-\text{нечетное число}, \quad j=\overline{1,s}, \end{cases} \\ f_0(x,t) = f(x,t), \quad F_n(t) = \int_0^1 f_s(x,t)v_n^{(s)}(x)dx. \end{cases} \qquad (33)$$

Лемма 6. *Пусть функция* $f(x,t)$ *равномерно по* t *удовлетворяет условиям* $f_x^{(2k-2s-1)}(x,t)\in C[0,1],\ f_x^{(2k-2s)}(x,t)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и одной из следующих групп условий*

$$\left.\begin{aligned} &f(0,t)=0,\ f_x''(0,t)=0,\dots,f_x^{(2k-2s-2)}(0,t)=0,\\ &f_x'(1,t)=0,\ f_x'''(1,t)=0,\dots,f_x^{(2k-2s-1)}(1,t)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2F_n^2(t)\le c\int_0^1\left[f_x^{(2k-2s)}(x,t)\right]^2dx,$$

где $c=\int_0^1 v_n^2(x)dx$.

Доказательство. В силу (6), справедливо следующее равенство:

$$(-1)^{k-s}\int_0^1 v_n^{(2k-2s)}(x)v_l(x)dx-(-1)^{k-s}\int_0^1 v_l^{(2k-2s)}(x)v_n(x)dx=(\lambda_n-\lambda_l)\int_0^1 v_n(x)v_l(x)dx.$$

К интегралам, стоящим в левой части последнего равенство применим правило интегрирования по частям $k-s$ раз. Затем учитывая условия (5), получим

$$\int_0^1 v_n^{(k-s)}(x)v_l^{(k-s)}(x)dx-\int_0^1 v_l^{(k-s)}(x)v_n^{(k-s)}(x)dx=(\lambda_n-\lambda_l)\int_0^1 v_n(x)v_l(x)dx.$$

Отсюда следует, что справедливо следующее равенство:

$$(\lambda_n-\lambda_l)\int_0^1 v_n(x)v_l(x)dx=\begin{cases}\int_0^1 v_n^2(x)dx>c, & n=l,\\ \int_0^1 v_n(x)v_l(x)dx=0, & n\neq l.\end{cases}$$

Следовательно, $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ – образует систему ортогональных функций. Нормируя его, имеем ортонормированную систему $\left\{v_n(x)/\sqrt{c}\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

Согласно формуле для $F_n(t)$, имеет место равенство

$$\lambda_n F_n(t)=(-1)^s\lambda_n\int_0^1 f(x,t)v_n(x)dx,$$

откуда, в силу равенства (6), получаем

$$\lambda_n F_n(t)=(-1)^k\int_0^1 f(x,t)v_n^{(2k-2s)}(x)dx.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2k-2s$ раз, получим

$$\lambda_n F_n(t)=(-1)^k\int_0^1 f(x,t)v_n^{(2k-2s)}(x)dx=$$

$$=(-1)^k\Big\{f(x,t)v_n^{(2k-2s-1)}(x)-f'_x(x,t)v_n^{(2k-2s-2)}(x)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{2k-2s-1}f_x^{(2k-2s-1)}(x,t)v_n(x)\Big\}\Big|_0^1+(-1)^k\int_0^1 f_x^{(2k-2s)}(x,t)v_n(x)dx.$$

В силу условий леммы 6, последнее равенство записывается в виде

$$\lambda_n F_n(t)=\int_0^1(-1)^k\sqrt{c}f_x^{(2k-2s)}(x,t)\left[v_n(x)/\sqrt{c}\right]dx.$$

Так как $\left\{v_n(x)/\sqrt{c}\right\}_{n=1}^{+\infty}$-ортонормальная система, то из последнего равенства следует, что $\lambda_n F_n(t)$ является коэффициентом Фурье функции $(-1)^k\sqrt{c}f_x^{(2k-2s)}(x,t)$ по системе $\left\{v_n(x)/\sqrt{c}\right\}_{n=1}^{+\infty}$.

Поэтому согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2F_n(t)\leq c\int_0^1\left[f_x^{(2k-2s)}(x,t)\right]^2dx\leq C_4=\text{const}<+\infty.$$

Лемма 6 доказана.

Аналогично лемме 6, доказывается следующая лемма:

Лемма 7. *Пусть функция* $f(x,t)$ *равномерно по* t *удовлетворяет условиям* $f_x^{(3k-3s-1)}(x,t)\in C[0,1],\quad f_x^{(3k-3s)}(x,t)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$ *и одной из следующих групп условий:*

I. *Когда* s *и* k *-одновременно четные и нечетные числа:*

условия (34) *и* $$\begin{cases} f_x^{(2k-2s)}(0,t)=0,\ f_x^{(2k-2s+2)}(0,t)=0,...,f_x^{(3k-3s-2)}(0,t)=0,\\ f_x^{(2k-2s+1)}(1,t)=0,\ f_x^{(2k-2s+3)}(1,t)=0,...,f_x^{(3k-3s-1)}(1,t)=0.\end{cases}$$

II. *Когда одно из чисел* k *и* s *-четное, а другое нечетное.*

условия (34) *и* $$\begin{cases} f_x^{(2k-2s)}(0,t)=0,\ f_x^{(2k-2s+2)}(0,t)=0,...,f_x^{(3k-3s-1)}(0,t)=0,\\ f_x^{(2k-2s+1)}(1,t)=0,\ f_x^{(2k-2s+3)}(1,t)=0,...,f_x^{(3k-3s-2)}(1,t)=0.\end{cases}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3F_n^2(t)\le c\int_0^1\left[f_x^{(3k-3s)}(x,t)\right]^2dx.$$

где $c=\int_0^1 v_n^2(x)dx$.

4. Существование решения задачи

Решение задачи $\{(1)-(3)\}$ будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n(x), \tag{35}$$

где $u_n(t),\quad n\in N$ - неизвестные функции, которые подлежат определению, а $v_n(x), n\in N$ - собственные функции (20) задачи $\{(4),(5)\}$.

Подставим (35) в уравнение (1) и условие (2). Затем умножим полученные равенства на $v_m(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до 1. В результате, после некоторых преобразований, получим следующую задачу относительно неизвестных функций $u_n(t)$, $n\in N$:

$$u_n''(t)+\frac{2\gamma}{t}u_n'(t)+\lambda_nu_n(t)=(-1)^sF_n(t),\ t\in(0,T),\ n\in N, \tag{36}$$

$$u_n(0)=\varphi_{1n},\ \lim_{t\to0}t^{2\gamma}u_n'(t)=\varphi_{2n},\ n\in N. \tag{37}$$

где

$$\varphi_{1n}=\int_0^1\varphi_1^{(s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx,\quad \varphi_{2n}=\int_0^1\varphi_2^{(s)}(x)v_n^{(s)}(x)dx,\quad n\in N, \tag{38}$$

а $F_n(t)$ $f_1(x,t), f_2(x,t),...,f_s(x,t)$-функции, определяемые равенствами (33).

Решение задачи $\{(37),(38)\}$ существует, единственно и определяется равенством [20]

$$u_n(t)=a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\frac{(-1)^s\pi}{2\cos\gamma\pi}\times$$

$$\times\int_0^t\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma}\tau F_n(\tau)d\tau, \quad (39)$$

где $J_w(x)$ - функция Бесселя первого рода.

Из (39) легко следует, что справедлива следующая

Лемма 8 [20]**.** *Для функций* $u_n(t)$, $n\in N$, *определяемых равенствами* (39), *справедливы неравенства*

$$\left|u_n(t)\right|\le\left|\varphi_{1n}\right|+\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|\varphi_{2n}\right|+\frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\left\|F_n(t)\right\|_{L_2(0,T)},\quad n\in N, \quad (40)$$

$$\left|t^{2\gamma}u'_n(t)\right|\le C_5\left|\varphi_{2n}\right|+\left|\varphi_{1n}\right|\frac{\lambda_n T^{1+2\gamma}}{1+2\gamma}+\lambda_n C_6\left\|f_n(t)\right\|_{L_2(0,T)},\quad n\in N,$$

$$\left|B^t_{\gamma-1/2}u_n(t)\right|\le\lambda_n\left[\left|\varphi_{1n}\right|+\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|\varphi_{2n}\right|+\frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\left\|f_n(t)\right\|_{L_2(0,T)}\right]+\left\|f_n(t)\right\|_{L_2(0,T)},n\in N,$$

где C_5 и C_6-некоторые положительные числа.

Теперь, подставляя (39) в (35), получим формальное решение задачи 1:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)\left\{a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)+\frac{(-1)^s\pi}{2\cos\gamma\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t\left[J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\sqrt{\lambda_n}t\right)J_{1/2-\gamma}\left(\sqrt{\lambda_n}\tau\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma}\tau F_n(\tau)d\tau\right\}. \quad (41)$$

Теорема 1. *Если* $\gamma\in(0,1)$ *и функции* $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 5, а функция* $f(x,t)$ *удовлетворяет условиям леммы 7, то решение задачи 1 существует и определяется в виде* (41).

Доказательство. Для этого надо доказать равномерную сходимость в $\overline{\Omega}$ рядов (41),

$$\frac{\partial^\mu u(x,t)}{\partial x^\mu}=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n^{(\mu)}(x),\quad j=\overline{1,2k-1},\quad t^{2\gamma}u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}t^{2\gamma}u'_n(t)v_n(x),$$

и следующих рядов - в любом компакте $D\subset\Omega$.

$$\frac{\partial^{2k}u(x,t)}{\partial x^{2k}}=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)v_n^{(2k)}(x), \quad (42)$$

$$\frac{\partial^{2s}}{\partial x^{2s}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(u''_n(t)+\frac{2\gamma}{t}u'_n(t)\right)v_n^{(2s)}(x). \quad (43)$$

Рассмотрим ряд (42). В силу (40), из (42) следует, что для доказательства равномерной сходимости этого ряда достаточно доказать равномерную сходимость следующих рядов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{1n}v_n(x),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{2n}v_n(x),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\sqrt{\int_0^T f_n^2(\tau)d\tau}\,v_n(x).$$

К каждому из этих рядов применим неравенство Коши-Буняковского. Затем принимая во внимание равенство (4), в любом компакте $D\subset\Omega$, имеем

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\varphi_{jn}v_n(x)\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3}\varphi_{jn}\frac{v_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right|\le\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3\varphi_{jn}^2\cdot\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right]^{1/2},\ j=\overline{1,2},$$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\sqrt{\int_0^T F_n^2(\tau)d\tau}\,v_n(x)\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_n^3}\sqrt{\int_0^T F_n^2(\tau)d\tau}\frac{v_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right|\le$$

$$\le\left[\int_0^T\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^3F_n^2(\tau)d\tau\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}\right]^{1/2}.$$

Вторые ряды, стоящие в правых частях последних неравенств, на основании леммы 3, а первые ряды-на основании лемм 5-7, сходятся. Следовательно, левые ряды сходятся равномерно. Отсюда следует, что ряд (42) сходится абсолютно и равномерно в любом компакте $D\subset\Omega$.

Аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость рядов, $u(x,t)$, $\partial^\mu u(x,t)/\partial x^\mu$, $\mu=\overline{1,2k-1}$, $t^{2\gamma}u_t(x,t)$ и ряда (43).

Из доказанного выше следует, что сумма ряда (41) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Следовательно, сумма ряда (41) является решением задачи 1.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Если $\gamma=0$ и функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют соответственно условиям лемм 5, 4 и 6, то решение задачи 1 существует и определяется в виде*:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\varphi_{1n}\cos\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}t+\frac{(-1)^s}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(\tau)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\tau)d\tau\right\}v_n(x).$$

5. Единственность и устойчивость решения задачи

Теорема 3. *Задача 1 не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача 1 имеет два решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Введем обозначение: $u_1(x,t)-u_2(x,t)=u(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ является решением однородной задачи, соответствующей задаче 1.

Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad \eta\le t\le T,\\ \int\limits_\eta^t\xi^{-2\gamma}u(x,\xi)d\xi, & \text{если}\quad 0\le t\le\eta,\end{cases}\tag{43}$$

где η-произвольное число из $(0,T]$.

Эта функция обладает следующими свойствами:

а) имеет непрерывные производные вида $\partial^j w/\partial x^j$, $j=\overline{0,2k-1}$ в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет граничным условиям (3);

б) $t^{2\gamma}w_t$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, а $t^{-2\gamma}\left(t^{2\gamma}w_t\right)'_t$ непрерывна в Ω и $w(x,\eta)=0$, $t\in[\eta,T]$.

Умножим уравнение (1) при $f(x,t)\equiv 0$ на функцию $t^{2\gamma}w(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int_0^1\int_0^T t^{2\gamma}w(x,t)\left[(-1)^s t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^{2s}u}{\partial x^{2s}}+(-1)^k\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right]dt\,dx=0.$$

Принимая во внимание (42), перепишем это равенство в виде

$$(-1)^s\int_0^\eta dt\int_0^1 w\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^{2s}u}{\partial x^{2s}}dx+(-1)^k\int_0^\eta t^{2\gamma}dt\int_0^1 w\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}dx=0.$$

Теперь, применяя правило интегрирования по частям, получим

$$(-1)^s\int_0^\eta\left[w\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^{2s-1}u}{\partial x^{2s-1}}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^{2s-2}u}{\partial x^{2s-2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{s-1}\frac{\partial^{s-1}w}{\partial x^{s-1}}\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right]_{x=0}^{x=1}dt+$$

$$+\frac{\partial^s w}{\partial x^s}t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\bigg|_{t=0}^{t=\eta}-\int_0^1 dx\int_0^\eta\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s w}{\partial x^s}t^{2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u}{\partial x^s}dt+$$

$$+(-1)^k\int_0^\eta t^{2\gamma}\left[\frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x^{2k-1}}w-\frac{\partial^{2k-2}u}{\partial x^{2k-2}}\frac{\partial w}{\partial x}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\frac{\partial^{k-1}w}{\partial x^{k-1}}\bigg|_{x=0}^{x=1}\right]dt+\int_0^\eta dt\int_0^1 t^{2\gamma}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}dx=0,$$

откуда, в силу свойств функций $w(x,t)$ и $u(x,t)$, следует

$$-\int_0^1 dx\int_0^\eta t^{2\gamma}\frac{\partial^{s+1}w}{\partial x^s\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u}{\partial x^s}dt+\int_0^\eta dt\int_0^1 t^{2\gamma}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\frac{\partial^k u}{\partial x^k}dx=0.$$

Отсюда, учитывая равенства $\dfrac{\partial^s u}{\partial x^s}=t^{2\gamma}\dfrac{\partial^{s+1}w}{\partial x^s\partial t}$ и $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}=t^{2\gamma}\dfrac{\partial^{k+1}w}{\partial x^k\partial t}$, имеем

$$-\int_0^1 dx\int_0^\eta\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u}{\partial x^s}dt+\int_0^1 dx\int_0^\eta t^{4\gamma}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}dt=0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^s u}{\partial x^s}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^s u}{\partial x^s}\right)^2,\ \frac{\partial^k w}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k w}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right]^2,\ \left(\partial^k/\partial x^k\right)w(x,\eta)=0,$$

получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^s u(x,\eta)}{\partial x^s}\right]^2dx=-4\gamma\int_0^1 dx\int_0^\eta t^{4\gamma-1}\left[\frac{\partial^k w}{\partial x^k}\right]^2dt.$$

Отсюда, следует, что

$$\int_0^1\left[\partial^s u(x,\eta)/\partial x^s\right]^2dx\equiv 0.$$

Следовательно, $\left(\partial^s/\partial x^s\right)u\left(x,\eta\right)\equiv 0$ при $x\in\left(0,1\right)$. Пользуясь общим решением этого уравнения и условием (3), получим $u\left(x,\eta\right)\equiv 0$, $x\in\left[0,1\right]$ для всех η. Так как η - произвольное число из $(0,T]$, то $u\left(x,t\right)\equiv 0$, т.е. $u_1\left(x,t\right)=u_2\left(x,t\right)$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 2 доказана. W

Теорема 3. *Пусть функции* $\varphi_1\left(x\right)$, $\varphi_2\left(x\right)$ *и* $f\left(x,t\right)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1 или 2. Тогда для решения задачи 1 справедлива оценка*

$$\left\|\frac{\partial^s u\left(x,t\right)}{\partial x^s}\right\|^2_{L_2(0,1)}\le C_0\left[\left\|\varphi_1\left(x\right)\right\|^2_{L_2(0,1)}+\left\|\varphi_2\left(x\right)\right\|^2_{L_2(0,1)}+\left\|f^{(s)}\left(x,t\right)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right], \tag{44}$$

где $C_0=const>0$, $\left\|g\left(x\right)\right\|_{L_2(0,1)}=\sqrt{\int\limits_0^1 g^2(x)dx}$.

Доказательство. Учитывая равенства (35) и (40), а также ортонормированность системы $\left\{v_n^{(s)}\left(x\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$, получим

$$\left\|\frac{\partial^s u\left(x,t\right)}{\partial x^s}\right\|^2_{L_2(0,1)}=\int\limits_0^1\left[\frac{\partial^s u\left(x,t\right)}{\partial x^s}\right]^2dx=\int\limits_0^1\left[\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(t\right)v_n^{(s)}\left(x\right)\right]^2dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2\left(t\right)\left(v_n^{(s)}\left(x\right)\right)^2+2\sum_{\substack{n,k=1\\ n\neq k}}^{+\infty}u_n\left(t\right)u_k\left(t\right)v_n^{(s)}\left(x\right)v_k^{(s)}\left(x\right)\right]dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2\left(t\right)\le C_7\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left|\varphi_{1n}\right|+\left|\varphi_{2n}\right|+\left\|F_n(t)\right\|_{L_2(0,T)}\right]^2\le$$

$$\le C_8\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left|\varphi_{1n}\right|^2+\left|\varphi_{2n}\right|^2+\left\|F_n\right\|^2_{L_2(0,T)}+2\left|\varphi_{1n}\right|\cdot\left|\varphi_{2n}\right|+\right.$$

$$\left.+2\left|\varphi_{1n}\right|\cdot\left\|F_n\right\|_{L_2(0,T)}+2\left|\varphi_{2n}\right|\cdot\left\|F_n\right\|_{L_2(0,T)}\right].$$

Заменяя последних три слагаемых по неравенству $a^2+b^2\ge 2ab$, которое верно при $a\ge 0$, $b\ge 0$, а затем, применяя неравенство Бесселя и обозначая $3C_8$ через C_0, получим

$$\left\|u\left(x,t\right)\right\|^2_{L_2(0,1)}\le C_0\left(\left\|\varphi_1\left(x\right)\right\|^2_{L_2(0,1)}+\left\|\varphi_2\left(x\right)\right\|^2_{L_2(0,1)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\|F_n(t)\right\|^2_{L_2(0,T)}\right). \tag{45}$$

Оценим последнее слагаемое правой части (45).

Принимая во внимание равенство $f^{(s)}\left(x,t\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}F_n\left(t\right)v_n^{(s)}\left(x\right)$ и ортонормированность системы $\left\{v_n^{(s)}\left(x\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$, имеем

$$\left\| f^{(s)}(x,t) \right\|^2_{L_{2,}(\Omega)} = \int_0^T \int_0^1 \left[f^{(s)}(x,t) \right]^2 dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t) v_n^{(s)}(x) \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} F_m(t) v_m^{(s)}(x) dxdt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T F_n^2(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| F_n \right\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\| F_n(t) \right\|^2_{L_2(0,T)} = \left\| f^{(s)}(x,t) \right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{46}$$

Подставляя (46) в (45), получим (44). Теорема 3 доказана. W

Литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972.
2. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Москва: Стройиздат, 1954.
3. Amanov D. and Yuldasheva A.V. Solvability and Spectral Properties of Boundary Value Problems for Equations of Even Order // Malaysian Journal of Matematical Sciences. 2009. Vol. 3, No. 2. P. 227–248.
4. Amanov D. About correctness of boundary value problems for an equation of even order // Uzbek Mathematical Journal. 2011. No. 4, P. 20–35.
5. Amanov D. and Ashuraliyev A. Well - Posedness of Boundary Value Problems for Partial Differential Equations of Even Order // First International Conference on Analysis and Applied Mathematics. 2012. P. 3–7.
6. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып. 2, С. 262–276.
7. Иргашев Б.Ю. О спектральной задаче для одного уравнения высокого четного порядка // Известия вузов. Математика. 2016. № 7, С. 44–54.
8. Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю. Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечетного порядка // Украинский математической журнал. 2014. Т. 66, № 10, С. 1348–1331.
9. Аманов Д. Краевая задача для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Известия вузов. Математика. 2014. № 12, С. 3–8.
10. Onur A. I., Kosimov Sh.G., Madraximov U.S. and Baskonus H.M. Solvability of the mixed problem of a high-order pde with fractional time derivatives, Sturm-Liouville operators on spatial variables and non-local boundary conditions // Rocky Mountain journal of mathematics 2019, Vol. 49, No. 4, pp. 1191-1206.
11. Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К. Об однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи в классах Соболева для уравнения с частными производными дробного порядка и оператором Лапласа // Материалы V Международной научной конфренции. Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. К 80-летию Адама Маремовича Нахушева. Нальчик. 4-7 декабря 2018 г.
12. Касимов Ш.Г. Бабаев М.М. О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени и операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева // Неклассические уравнения математической физики и их приложения Узбекско–Российская научная конференция Ташкент, 24–26 октября, 2019 г.
13. Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ. мат. науки. 2020. Т. 30, № 1, С. 8–19.
14. Ashurov R.R., Muhiddinova A.T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42, No. 3, P. 517–525.
15. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя // Известия вузов. Математика. 2017. № 8, С. 27–41.
16. Karimov Sh.T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order // Filomat. 2018. Vol. 32, No. 3, P. 873–883.
17. Karimov Sh.T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. No. 15, P. 853–862.
18. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя // Владикавказский математический журнал. 2018. Т. 20, № 3, С. 57–68.
19. Urinov A.K. and Karimov Sh.T. On the Cauchy problem for the interated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41, No. 1, P. 102–110.
20. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Бюллетень Института математики 2022, Vol. 5, №1, стр. 14-24.
21. Азизов М.С. О разрешимости нелокальной начально-граничной задачи для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя // Scientific bulletin Physical and Mathematical Research, 2022, №1.
22. Уринов А.К., Азизов М.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 2.
23. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1969. 528 с.
24. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Физматлит, 1959. 232 с.