O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

3-2022

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК.ФЕРГУ

Muassis: Farg‘ona davlat universiteti.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» “Scientific journal of the Fergana State University” jurnali bir yilda olti marta elektron shaklda nashr etiladi.

Jurnal filologiya, kimyo hamda tarix fanlari bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnaldan maqola ko‘chirib bosilganda, manba ko‘rsatilishi shart.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan 2020 yil 2 sentabrda 1109 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Muqova dizayni va original maket FarDU tahririy-nashriyot bo‘limida tayyorlandi.

Tahririyat manzili:
150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.
Tel.: (0373) 244-44-57. Mobil tel.: (+99891) 670-74-60
Sayt: www.fdu.uz. Jurnal sayti

Bosishga ruxsat etildi:
Qog‘oz bichimi: - 60×84 1/8
Bosma tabog‘i:
Ofset bosma: Ofset qog‘ozi.
Adadi: 10 nusxa
Buyurtma №
FarDU nusxa ko‘paytirish bo‘limida chop etildi.
Manzil: 150100, Farg‘ona sh., Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.

Farg‘ona,
2022.

ADABIYOTSHUNOSLIK

TILSHUNOSLIK

MATEMATIKA

FIZIKA - TEXNIKA

MATEMATIKA

UDK: 517.946.6 **DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss3/a40**

INVOLYUTSIYA QATNASHGAN KASR TARTIBLI PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN QO'YILGAN TESKARI MASALA

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДРОБНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

AN INVERSE PROBLEM FOR A FRACTIONAL PARABOLIC EQUATION WITH INVOLUTION

Кадиркулов Бахтияр Жалилович, Жалилов Мухаммадали Абдумуталибович

[1]Кадиркулов Бахтияр Жалилович − Ташкентский государственный университет востоковедения, кафедра «Математика и информационные технологии»,доктор физико-математических наук, доцент.

[2]Жалилов Мухаммадали Абдумуталибович − Ферганский государственный университет, базовыйдокторант.

Annotatsiya

Ushbu maqolada to'rtburchakli sohada Kaputo operatori qatnashgan, involyutsiyali parabolik differensial tenglama uchun teskari masala ko'rib chiqilgan. O'zgaruvchilarni ajratish usulidan foydalanib, masalaning yechimi Furye qatori shaklida qurilgan.Masala yechimining yagonaligi isbotlangan, mavjudligi haqidagi teorema keltirilgan. Maqolada ko'rilgan masala matematik-fizikaning zamonaviy muammolariga oid bo'lib,olingan natijalar ko'proq nazariy ahamiyatga ega hamda ular kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalarni o'rganishda hamda matematik fizika tenglamalari nazariyasida qo'llanilishi mumkin.

Аннотация

В данной работе рассматривается обратная задача для дробного параболического уравнения четвертого порядка с дробным оператором Капуто и с инволюцией. С помощью метода разделения переменных решение задачи строится в виде ряда Фурье. Доказывается теорема о единственности и существовании решения задачи. Установлен критерий существования и единственности регулярного решения этой обратной задачи в заданной области. Полученные в статье результаты могут быть использованы при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка, а также в теории уравнений математической физики.

Abstract

In this paper, we consider an inverse problem for a fourth-order fractional parabolic equation with a fractional Caputo operator and involution. Using the method of separation of variables, the solution to the problem is constructed in the form of a Fourier series. Theorems on the existence and uniqueness of a solution to the considered problem are proved. A criterion for the existence and uniqueness of a regular solution of the problem in a given domain is established.

Obtained results can be used in the study of boundary value problems for partial differential equations of fractional order, as well as in the theory of equations of mathematical physics.

Kalit so'zlar: *involyutsiya qatnashgan differensial tenglama, Koshi-Shvars tengsizligi, kasr tartibli integro-differensial operator, Kaputo operatori, Mittag-Leffler funksiyasi.*

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение с инволюцией, неравенство Коши-Шварца, оператор дробного интегро-дифференцирования, оператор Капуто, функция Миттаг-Леффлера.*

Key words: *differential equation with involution, Cauchy-Schwarz inequality, fractional integro-differentiation operator, Kaputo operator, Mittag-Leffler function.*

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\Omega=\{(x,t):-\pi<x<\pi, 0<t<1\}$, для дробного уравнения параболического типа с инволюцией вида

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x;t)-\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}+\varepsilon \frac{\partial^2 u(-x;t)}{\partial x^2}=f(x) \quad (1)$$

рассмотрим следующую задачу:

Задача ID. Требуется найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$ обладающую следующими свойствами:

1) $u, {}_C D_{0t}^{\alpha} u, u_{xx} \in C(\overline{\Omega}),\ f(x) \in C[-\pi,\pi]$;

2) удовлетворяют уравнению (1) в области Ω;

3) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,0)-u_t(x,1)=\psi(x),\ -\pi \le x \le \pi\ , \tag{2}$$

$$u(-\pi,t)=u(\pi,t)=0,\ 0 \le t \le 1\ . \tag{3}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные функции, $\varepsilon \in R$, а ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ -оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, которая определяется по формуле [1]:

$${}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}d\tau,\ t>0 \cdot$$

Отметим, что по построению различных моделей задач теоретической физики с применением дробного исчисления изложены в работах [2], а более подробный обзор, посвящённый приложению дробного исчисления в прикладных задачах приведены в работе [3].

Нелокальные условия типа (2) имеют место при моделировании задач обтекания профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной [4]. Исследование нелокальных задач для уравнения в частных производных второго и высокого порядков обусловлено тем, что такие задачи возникают при моделировании явлений диффузии в физике твёрдых тел, при исследовании колебаний балок и пластин в механике [5].

Отметим, что отображение I принято называть инволюцией, если $I^2=E$, где E - тождественное отображение. Отметим, что задачи для дифференциальных уравнений с инволюцией исследовались в работах многочисленных авторов (см. напр-р[6,7]).

О собственных функциях задачи ID.

Сначала находим собственные числа и собственные функции однородной задачи ($f(x)=0$), соответствующей задаче ID. Для этого мы используем метод разделения переменных. Согласно методу, частные решения этой задачи будем искать в виде $u(x;t)=X(x)T(t)$. Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению

$$X''(x)-\varepsilon X''(-x)+\lambda X(x)=0\ . \tag{4}$$

Поскольку функция $u(x,t)$ должна удовлетворять краевым условиям (3), то получаем следующие краевые условия для нахождения функции $X(x)$:

$$X(-\pi)=X(\pi)=0\ . \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что задача (4), (5) – самосопряженная. Тогда согласно теории, дифференциальный оператор, соответствующий этой задаче имеет вещественные собственные значения, а система собственных функций образует полную ортогональную систему.

Как известно, собственные числа и собственные функции спектральной задачи (4), (5) имеют вид [7]

$$\lambda_{1k}=(1-\varepsilon)\left(k-\frac{1}{2}\right)^2,\lambda_{2k}=(1+\varepsilon)k^2,k\in N\ ,$$

$$X_{1k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x,X_{2k}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx,k\in N\ , \tag{6}$$

более того, при $|\varepsilon|<1$ система функций (6) является полной в $L_2(-\pi,\pi)$ и образует базис в ней.

Существование и единственность решения задачи ID

Имеет место:

Теорема 1.Если существует решение задачи ID, то оно единственно.

Доказательство.Покажем, что однородная задача ($\varphi(x)=\psi(x)=0$) имеет только тривиальное решение. Предположим противоположное. Пусть существуют два решения $\{u_1(t,x), f_1(x)\}$ и $\{u_2(t,x), f_2(x)\}$ задачи ID. Обозначим

$$\tilde{u}(t,x)=u_1(t,x)-u_2(t,x) \text{ и } \tilde{f}(x)=f_1(x)-f_2(x).$$

Тогда функции $\tilde{u}(t,x)$ и $\tilde{f}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$_C D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}(x;t)-\frac{\partial^2\tilde{u}(x;t)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2\tilde{u}(-x;t)}{\partial x^2}=\tilde{f}(x) \quad (7)$$

и условиям

$$\tilde{u}(-\pi,t)=\tilde{u}(\pi,t)=0,\ 0\le t\le 1, \quad (8)$$

$$\tilde{u}(x,0)=0,\ _C D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}(x,0)-\tilde{u}_t(x,1)=0,\ x\in[-\pi,\pi]. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}_{ik}(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{u}(x,t)X_{ik}(x)dx,\ i=1,2. \quad (10)$$

Дифференцируя функцию (10)по t, учитывая при этом уравнение (7) и условия (8) и (9), заключаем, что функция $\tilde{u}_{ik}(t)$ и постоянная $\tilde{f}_{ik}$ удовлетворяет условиям

$$_C D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}_{ik}(t)+\lambda_{ik}\tilde{u}_{ik}(t)=\tilde{f}_{ik},\ i=1,2, \quad (11)$$

$$\tilde{u}_{ik}(0)=0,\ _C D_{0t}^{\alpha}\tilde{u}_{ik}(0)-\tilde{u}'_{ik}(1)=0,\ i=1,2, \quad (12)$$

где $\tilde{f}_{ik}=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)X_{ik}xdx,\ i=1,2$.

Нетрудно увидеть, что общее решение дробного уравнения из (11) имеет вид

$$\tilde{u}_{ik}(t)=\tilde{C}_{ik}E_{\alpha}(-\lambda_{ik}t^{\alpha})+\frac{\tilde{f}_{ik}}{\lambda_{ik}},\ i=1,2,$$

где $E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ z\in C,\ \mathrm{Re}(\alpha)>0$ - функция Миттаг–Леффлера [1].

Отсюда, учитывая краевые условия в (11), относительно $\tilde{C}_{ik}$ и $\tilde{f}_{ik}$ получим однородную систему уравнений

$$\tilde{C}_{ik}+\frac{\tilde{f}_{ik}}{\lambda_{ik}}=0,\ \tilde{C}_{ik}\left(1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{ik})\right)=0,\ i=1,2,$$

которая имеет только тривиальное решение, то есть $\tilde{C}_{ik}=\tilde{f}_{ik}=0,\ i=1,2$.

В результате получим, что для любого фиксированного $t\in[0;1]$ функции $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{f}(x)$ ортогональны системе (6), которая является полной в $L_2(-\pi,\pi)$. Тогда $\tilde{u}(x,t)=0, \tilde{f}(x)=0$, Таким образом, если решение задачи IDсуществует, то оно единственно. Тем самым единственность решения задачи доказана.

Решение $u(x;t)$, $f(x)$ задачи будем искать в виде разложения по системе функций (6), т.е. в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{1k}(t)\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x+u_{2k}(t)\sin kx\right), \tag{13}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{1k}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x+f_{2k}\sin kx\right), \tag{14}$$

где $u_{ik}(t)$ - неизвестные функции, а f_{ik}, неизвестные постоянные, $i=1,2$, $k\in N$.

Подставляя (13) и (14) в уравнение (1), учитывая краевые условия (3), а также полноту системы (6), для нахождения функций $u_{ik}(t)$ и постоянных f_{ik} получим следующие условия:

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u_{ik}(t)+\lambda_{ik}u_{ik}(t)=f_{ik}, \tag{15}$$

$$u_{ik}(0)=\varphi_{ik},\ {}_C D_{0t}^{\alpha}u_{ik}(0)-u'_{ik}(1)=\psi_{ik}. \tag{16}$$

Здесь $i=1,2$, $k\in N$, φ_{ik},ψ_{ik}- коэффициенты разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе (6), то есть

$$\varphi_{ik}=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)X_{ik}(x)dx,\psi_{ki}=\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)X_{ik}dx. \tag{17}$$

Находим общее решение (15), которое имеет вид

$$u_{ik}(t)=C_{ik}E_{\alpha}(-\lambda_{ik}t^{\alpha})+\frac{f_{ik}}{\lambda_{ik}},i=1,2, \tag{18}$$

где C_{ik}, $i=1,2$, $k\in N$ - произвольные постоянные.

Далее, удовлетворяя (18) краевым условиям (16), получим, что постоянные C_{ik}, f_{ik}, $i=1,2$, $k\in N$ являются решениями следующей системы

$$C_{ik}+\frac{f_{ik}}{\lambda_{ik}}=\varphi_{ik},-\lambda_{ik}C_{ik}\left(1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{ik})\right)=\psi_{ik}. \tag{19}$$

Отсюда находим

$$C_{ik}=\frac{-\psi_{ik}}{\lambda_{ik}\left(1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{ik})\right)},f_{ik}=\lambda_{ik}(\varphi_{ik}-C_{ik}), \tag{20}$$

и значить решение $u_{ik}(t)$ имеет вид

$$u_{ik}(t)=\varphi_{ik}+\frac{\psi_{ik}\left[1-E_{\alpha}(-\lambda_{ik}t^{\alpha})\right]}{\lambda_{ik}\left[1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{ik})\right]}. \tag{21}$$

Таким образом, найден формальный вид решения задачи в виде рядов (13) и (14), где коэффициенты f_{ik} и функции $u_{ik}(t)$, $i=1,2$, $k\in N$ определяются соответственно по формулам (20), (21).

Справедливо следующее утверждение о существовании решения задачи ID:

Теорема 2. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям $\varphi(x)\in C^2[-\pi,\pi],\psi(x)\in C[-\pi,\pi],\varphi^{(3)}(x),\psi^{(1)}(x)\in L_2(-\pi,\pi)$, $\varphi^{(2n)}(\pm\pi)=0,\psi(\pm\pi)=0,n=\overline{0,1}$. Тогда решение задачи ID существует и определяется в виде суммы рядов

$$u(x,t)=\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{1k}\left[1-E_{\alpha}(-\lambda_{1k}t^{\alpha})\right]}{\lambda_{1k}\left[1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{1k})\right]}\cos(k-0,5)x+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{2k}\left[1-E_{\alpha}(-\lambda_{2k}t^{\alpha})\right]}{\lambda_{2k}\left[1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{2k})\right]}\sin kx$$

$$f\left(x\right)=-\varphi''(x)+\varepsilon\varphi''(-x)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{1k}}{\left[1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{1k})\right]}\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{2k}}{\left[1-E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{2k})\right]}\sin kx\cdot$$

Литература:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics studies, 204. Elsevier Science B. M., Amsterdam, 2006. xvi +523pp. ISBN -13:978-0-444-51832-3.
2. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media // Publication City/Country Berlin, Germany. 2011. –505 p.
3. Tenreiro Machado J.A. Handbook of Fractional Calculus with Applications; Walter de Gruyter GmbH: Berlin, Germany. -2019. Volumes 1-8. ISBN 978-3-11-057090-8.
4. Sabitov K.B., Yunusova G. R. Inverse Problem for an Equation of Parabolic-Hyperbolic Type with a Nonlocal Boundary Condition // Differential Equations. 2012. Vol. 48, № 2. pp. 246–254.
5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. -М.: Машиностроение. 1985. -472с.
6. Jalilov M.A., Kayumova A.G. **On a Boundary Value Problem for a Nonlocal Mixed-Type Equation with the Hilfer Operator** //AIP Conference Proceedings. 2021. № 2365. 1-8 p.
7. Кадиркулов Б.Ж., ЖалиловМ. А. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с дробной производной // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики. Международная конференция. 2021. Нальчик. № 4. С.89-90.