O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

3-2022

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК.ФЕРГУ

Muassis: Farg‘ona davlat universiteti.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» “Scientific journal of the Fergana State University” jurnali bir yilda olti marta elektron shaklda nashr etiladi.

Jurnal filologiya, kimyo hamda tarix fanlari bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan 2020 yil 2 sentabrda 1109 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Muqova dizayni va original maket FarDU tahririy-nashriyot bo‘limida tayyorlandi.

Tahririyat manzili:
150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.
Tel.: (0373) 244-44-57. Mobil tel.: (+99891) 670-74-60
Sayt: www.fdu.uz. Jurnal sayti

Bosishga ruxsat etildi:
Qog‘oz bichimi: - 60×84 1/8
Bosma tabog‘i:
Ofset bosma: Ofset qog‘ozi.
Adadi: 10 nusxa
Buyurtma №
FarDU nusxa ko‘paytirish bo‘limida chop etildi.
Manzil: 150100, Farg‘ona sh., Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.

Farg‘ona,
2022.

MATEMATIKA

UDK: 517.588 **DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss3/a39**

К ТЕОРИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ON THE THEORY OF HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS IN TWO VARIABLES OF THE SECOND ORDER

IKKINCHI TARTIBLI IKKI O'ZGARUVCHILI GIPERGEOMETRIK FUNKSIYALAR NAZARIYASI HAQIDA

Эргашев Тухтасин Гуламжанович[1], Уринбоева Дилрабохон Дилшоджон кизи[2]

[1]**Эргашев Тухтасин Гуламжанович** – доктор физ.-мат.наук, и.о. профессора кафедры. Высшей математики Национального исследовательского университета «ТИИИМСХ»

[2]**Уринбоева Дилрабохон Дилшоджон кизи** – Магистрант кафедры теоретической физики Национального университета Узбекистана.

Annotatsiya

Maxsus funksiyalar bo'yicha mashhur kitobda Gorn ro'yxatiga kirgan bir necha ikki o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarning ta'riflarida noaniqliklar va ba'zi gipergeometrik funksiyalar qanoatlantirishi mumkin bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalarning sistemalarida xatoliklar uchraydi. Mazkur ishda dastlabki manbalarga tayangan holda ikki o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarning ta'riflariga aniqliklar kiritiladi va gipergeometrik tipdagi differensial tenglamalarni tuzish jarayoni almashtirishlarni bevosita bajarish yo'li bilan batafsil bayon qilinadi.

Аннотация

В известном справочнике по специальным функциям встречаются опечатки в определениях некоторых функций двух переменных, вошедших в список Горна и неточности в нескольких системах дифференциальных уравнений, которым якобы удовлетворяют некоторые гипергеометрические функции двух переменных второго порядка. В настоящей работе на основании первоисточников уточняются определения гипергеометрических функций двух переменных, проверяется истинность всех систем дифференциальных уравнений гипергеометрического типа с подробным описанием процесса составления систем дифференциальных уравнений с частными производными.

Abstract

In a well-known handbook on special function, there are misprints in the definitions of some functions included in the Horn List and inaccuracies in several systems of differential equations that some second-order hypergeometric functions of two variables allegedly satisfy. In this paper, on the basis of primary sources, the definitions of hypergeometric functions of two variables are defined, the truth of all systems of differential equations of the hypergeometric type is verified, with a detailed description of the process of compiling systems of partial differential equations.

***Kalit so'zlar**: икки ўзгарувчили гипергеометрик функциянинг таърифи, Горн рўйхати, гипергеометрик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системаси.*

***Ключевые слова:** определение гипергеометрической функции двух переменных, список Горна, системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа.*

***Key words:** definition of hypergeometric function in two variables, Horn List, systems of differential equations of hypergeometric type.*

ВВЕДЕНИЕ

Символ Похгаммера $(\lambda)_n$ при целых n определяется равенством

$$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1), \quad n=1,2,...; \quad (\lambda)_0 \equiv 1. \tag{1.1}$$

Справедливы равенства $(\lambda)_n = (-1)^n(1-n-\lambda)_n$, $(1)_n = n!$ и

$$(\lambda)_n = \Gamma(\lambda+n)/\Gamma(\lambda). \tag{1.2}$$

Равенство (1.2) можно использовать для введения символа $(\lambda)_n$ при действительных (комплексных) n.

Гипергеометрическая функция (функция Гаусса) определяется внутри круга $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда

$$F(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \qquad (1.3)$$

а при $|z|\geq 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (1.3) параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c\neq 0,-1,-2,...$ а $(\alpha)_k$ есть символ Похгаммера (1.1). Гипергеометрическая функция (1.3) является решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, называемого гипергеометрическим уравнением:

$$z(1-z)y''(z)+\left[c-(a+b+1)z\right]y'(z)-aby(z)=0,$$

где $y(z)\equiv F(a,b;c;z)$.

Термин «гипергеометрический ряд» впервые был использован Джоном Валлисом в 1655 году в книге *Arithmetica Infinitorum*. Гипергеометрические ряды изучались Леонардом Эйлером, и более подробно Гауссом. В XIX веке изучение было продолжено Эрнстом Куммером, а Бернхард Риман определил гипергеометрическую функцию через уравнение, которому она удовлетворяет.

Большие успехи в изучении теории гипергеометрического ряда одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для рядов от двух или многих переменных. Аппель определил в 1880 году четыре ряда $F_1,\ldots,F_4$ (см. ниже равенства (2.4) – (2.7)), каждый из которых аналогичен ряду Гаусса Пикар указал, что один из этих рядов тесно связан с функцией, изученной Похгаммером в 1870 г., а Пикар и Гурса построили теорию рядов Аппеля, которая аналогично теории Римана для гауссовского гипергеометрического ряда. Гумберт изучил конфлюэнтный гипергеометрический ряд двух переменных. Изложение этих результатов французской школы со ссылками на оригинальную литературу содержатся в монографии Аппеля и Кампе-де-Ферье [1], которая являлась единственным трудом в этой области вплоть до середины 20-го века. Эта работа содержит также обширную библиографию, содержащую все существенные работы до 1926 г.

Профессор Калифорнийского технологического института Гарри Бейтмен в течение двух десятков лет (1927 – 1946) собирал рассеянные по различным монографиям и периодической литературе сведения о специальных функциях: их свойствах, интегральных и иных представлениях, связях между различными классами специальных функций, определенных интпегралах, содержащих специальные функции, и т.д. В результате этой работы была составлена гигантская картотека, содержавшая почти все, что касалось указанных вопросов, а также теории дифференциальных уравнений математической физики, интегральных уравнений и т.д.

Последовавшая в 1946 г. смерть Бейтмена прервала его работу над задуманной энциклопедией классического анализа. Для обработки собранного материала был создан штаб во главе с известным английским математиком Артуром Эрдейи, в который вошли немецкие ученые В.Магнус и Ф.Оберхеттингер и итальянский математик Ф.Трикоми.

Эти ученые вместе с руководимой ими группой молодых математиков создали, используя материалы Бейтмена, уникальный труд по теории специальных функций и интегральных преобразований. Он состоит из трех томов под общим названием «Высшие трансцендентные функции» [2–4] и двух томов «Интегральных преобразований» [5,6] (имеется русский перевод: см. [7–9] и [10,11], соответственно).

Например, первый том трехтомника, названный «Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра» [2, 7], охватывает некоторые классы специальных функций: гамма- и бета-функции, гипергеометрическая функция и конфлюэнтная гипергеометрическая функция, всевозможные обобщения гипергеометрических функций (функция Мейера, Мак-Роберта и др.), функции и многочлены

Лежандра. В пятой главе этого тома обсуждаются дальнейшие обобщения гипергеометрической функции и §§ 5.7 – 5.14 посвящены гипергеометрическим функциям многих (точнее, двух) переменных.

Однако, следует отметить, что в §5.7 наблюдались опечатки в определениях трех конфлюэнтных гипергеометрических функций двух перемен-ных и в § 5.9 приведены ошибочно некоторые системы дифференциальных уравнений, которым якобы удовлетворяют 8 гипергеометрические функции двух переменных. Хуже всего то, что эти опечатки и ошибки без изменения перешли на переводные издания книги (см., например, две издания русского перевода [7]). Более того, в русскоязычных изданиях [7] дополнительно допущена опечатка в определении еще одной функции. Возможно, вышеназванные обстоятельства явились тормозом в дальнейшем исследовании свойств этих «несчастных функций».

На опечатки в определениях «несчастных функций» двух переменных одним из первых обратил внимание О.И.Маричев [12–14]. В известной монографии [15, стр. 22–26] устранены все недостатки, допущенные в § 5.7 [2], а истинность систем дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, приведенных в § 5.9 [2,7] с ошибками, до сих полностью нигде не обсуждалась. Отметим лишь работу [16].

В настоящей работе уточняются определения гипергеометрических функций двух переменных, перепроверяется истинность всех систем дифференциальных уравнений гипергеометрического типа согласно первоисточникам, а в случаях первоисточников отсутствия подробно обсуждается процесс составления систем дифференциальных уравнений с частными производными.

1. Гипергеометрические функции двух переменных

Горн [17] дал следующее общее определение: двойной степенной ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \tag{2.1}$$

является гипергеометрическим рядом, если два отношения

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{mn}} = f(m,n) \quad \text{и} \quad \frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}} = g(m,n) \tag{2.2}$$

– рациональные функции от m и n.

Горн положил

$$f(m,n) = \frac{F(m,n)}{F'(m,n)},\ g(m,n) = \frac{G(m,n)}{G'(m,n)}, \tag{2.3}$$

где $F,\ F',\ G,\ G'$ – многочлены от m и n, имеющие соответственно степени $p,\ p',\ q,\ q'$. При этом предполагается, что F' имеет множитель $m+1$, а G' – множитель $n+1$; F и F' не имеют общих множителей, за исключением, быть может, $m+1$, а G и G' не имеют общих множителей, за исключением, быть может, $n+1$. Наибольшее из четырех чисел $p,\ p',\ q,\ q'$ называют порядком гипергеометрического ряда (1). Горн исследовал, в частности, гипергеометричес-кие ряды второго порядка. Если $p=q=p'=q'$, то гипергеометрический ряд двух переменных (2.1) называется полным, в противном случае, конфлюэнтным. Горн установил, что кроме некоторых рядов, выражаемых через ряды от одного переменного или через произведения двух гипергеометрических рядов, каждый из которых зависит от одного переменного, существуют 34 (14 полных и 20 конфлюэнтных) существенно различных сходящихся ряда порядка 2 (список Горна).

Аппель [1, стр. 296] в 1880 г. определил четыре ряда:

$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n, \quad (2.4)$$

$$F_2\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n\,m!n!}x^m y^n, \quad (2.5)$$

$$F_3\left(\alpha,\alpha',\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n, \quad (2.6)$$

$$F_4\left(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n\,m!n!}x^m y^n. \quad (2.7)$$

Горн [18] в 1931 г. определил еще 10 гипергеометрических рядов двух переменных, которых он обозначил через $G_1, G_2, G_3, H_1, \ldots, H_7$; таким образом, он завершил набор всех возможных (полных) гипергеометрических рядов второго порядка от двух переменных. Однако, в обеих изданиях русского перевода в определение гипергеометрической функции H_7 [7, фор.5.7(19)] имеется опечатка. Правильной будет следующая формула [2, фор. 5.7(19)]:

$$H_7\left(\alpha,\beta,\gamma;\delta;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m\,m!n!}x^m y^n. \quad (2.8)$$

Области определения функций Аппеля F_1 ,..., F_4 и Горна G_1, G_2, G_3, H_1, ..., H_7 приведены в [2,7; см. рисунки 3 в § 5.7].

Гумберт [19] определил семь конфлюэнтных форм четырех полных рядов Аппеля и обозначил эти ряды через Φ_1, Φ_2, Φ_3, Ψ_1, Ψ_2, Ξ_1, Ξ_2. Кроме того, существуют 13 конфлюэнтных форм функций Горна, которые обозначаются через Γ_1, Γ_2, $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_{11}$. [18, 20]. Работа Гумберта [19] была достаточно описана Аппелем и Кампе де Ферiет [1, стр. 124–135], а области определения и условия сходимости всех этих 20 конфлюэнтных рядов от двух переменных также даны в [2, 7, фор. 5.7(20) –5.7(39)]. Особенно следует отметить, что определения Φ_1, Φ_2 и Ξ_2 , данные в [2, 7, фор. 5.7(20), 5.7(21) и 5.7(26)] ошибочны. На опечатки в определениях этих функций впервые указал Маричев [12–14; Сривастава и Карлссон [15, стр. 25–26, фор. (16), (17), (24);] также предложили исправленные варианты определений этих трех функций. Следовательно,

$$\Phi_1\left(\alpha,\beta;\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n, \quad (2.9)$$

$$\Phi_2\left(\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n, \quad (2.10)$$

$$\Xi_2\left(\alpha,\beta;\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n. \quad (2.11)$$

Таким образом, гипергеометрические функции двух переменных (список Горна) определяется формулами от 5.7(6) по 5.7(39), кроме формул 5.7(19) – 5.7(20), 5.7(26) [2,7], которые следовало бы заменить на формулы (2.8) – (2.11), соответственно.

2. Системы дифференциальных уравнений в частных производных

Ряды

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}A_{mn}x^m y^n,$$

где

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{mn}}=\frac{F(m,n)}{F'(m,n)},\ \frac{A_{m,n+1}}{A_{mn}}=\frac{G(m,n)}{G'(m,n)} \tag{3.1}$$

и F, F', G, G' являются такими же многочленами, как и в (2.1) – (2.3), удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эту систему можно записать с помощью дифференциальных операторов

$$\delta\equiv x\frac{\partial}{\partial x}\quad \text{и}\quad \delta'\equiv y\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.2}$$

в виде

$$\left.\begin{aligned}\left[F'(\delta,\delta')x^{-1}-F(\delta,\delta')\right]z=0,\\ \left[G'(\delta,\delta')y^{-1}-G(\delta,\delta')\right]z=0.\end{aligned}\right\}(3.3)$$

В §5.9 [2,7] приводятся 34 системы дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, которым удовлетворяют гипергеометрические функции двух переменных второго порядка. Для того чтобы проверить истинность полученных систем, в каждом отдельном случае, воспользовавшись дифференциальными операторами (3.2), постараемся получить систему дифференциальных уравнений с частными производными в виде (3.3). Непосредственные вычисления показали, что в оригинале книги [2] в 26 случаях гипергеометрическая функция из списка Горна действительно удовлетворяет соответствующей системы дифференциальных уравнений, а 8 случаях системы дифференциальных уравнений, которым якобы удовлетворяют функции H_4, H_5, H_7, Γ_1, H_2, H_3, H_5 и H_7, не соответствуют действительности, а в русскоязычных изданиях книги [7] эта статистика меняется на 25 и 9, потому что в [7] во втором уравнении системы для функции H_1 допущена опечатка. Поэтому подробно остановимся на составление систем дифференциальных уравнений для этих функций.

А) Рассмотрим функцию

$$H_4(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_m(\varepsilon)_n m!n!}x^m y^n$$

и введем обозначение $A(m,n)=\dfrac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_n}{(\gamma)_m(\varepsilon)_n m!n!}$. Составив соотношения вида (3.1), получим

$$F(m,n)=(\alpha+2m+n)(\alpha+1+2m+n),\quad F'(m,n)=(\gamma+m)(m+1),$$
$$G(m,n)=(\alpha+2m+n)(\beta+n),\quad G'(m,n)=(\varepsilon+n)(n+1)$$

С помощью непосредственных элементарных преобразований, получим

$$F(\delta,\delta')z=\left(\alpha+2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\alpha+1+2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)z$$
$$=\alpha(\alpha+1)z+(4\alpha+6)xp+2(\alpha+1)yq+4x^2r+4xys+y^2t,$$
$$G(\delta,\delta')z=\left(\beta+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\alpha+2x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)z=\alpha\beta z+2\beta xp+(\alpha+\beta+1)yq+2xys+y^2t,$$
$$F'(\delta,\delta')\left(\frac{z}{x}\right)=\left(\gamma+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{z}{x}\right)=\gamma p+xr,$$
$$G'(\delta,\delta')\left(\frac{z}{y}\right)=\left(\varepsilon+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(1+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{z}{y}\right)=\varepsilon q+yt$$

где $z = H_4\left(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon;x,y\right)$. Здесь и далее приняты обозначения:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Подставив найденные выражения для в систему (3.3), получим искомую систему дифференциальных уравнений, которую удовлетворяет функция $z = H_4\left(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon;x,y\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x(1-4x)r-4xys-y^2t+\left[\gamma-(4\alpha+6)x\right]p-2(\alpha+1)yq-\alpha(\alpha+1)z=0\\ y(1-y)t-2xys+\left[\varepsilon-(\alpha+\beta+1)y\right]q-2\beta xp-\alpha\beta z=0\end{aligned}\right\}H_4 \qquad (3.4)$$

(ср. систему (3.4) с системой 5.9(19) из [2,7]).

Аналогично составляются следующие системы дифференциальных уравнений:

B) $$H_5\left(\alpha,\beta,\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}(\beta)_{n-m}}{(\gamma)_n\, m!n!}x^m y^n,$$

$$\left.\begin{aligned} x(1+4x)r-y(1-4x)s+y^2t+\left[1-\beta+(4\alpha+6)x\right]p\\ +2(\alpha+1)yq+\alpha(\alpha+1)z=0\\ y(1-y)t-xys+2x^2r+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)y\right]q+(2+\alpha-2\beta)xp-\alpha\beta z=0\end{aligned}\right\}H_5 \quad (3.5)$$

(ср. систему (3.5) с системой 5.9(20) из [2,7]);

C) $$H_7\left(\alpha,\beta,\gamma;\delta;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m-n}(\beta)_n(\gamma)_n}{(\delta)_m\, m!n!}x^m y^n,$$

$$\left.\begin{aligned} x(1-4x)r+4xys-y^2t+\left[\delta-(4\alpha+6)x\right]p+2\alpha yq-\alpha(\alpha+1)z=0\\ y(1+y)t-2xs+\left[1-\alpha+(\beta+\gamma+1)y\right]q+\beta\gamma z=0\end{aligned}\right\}H_7 \quad (3.6)$$

(ср. систему (3.6) с системой 5.9(22) из [2,7]);

D) $$\Gamma_1\left(\alpha,\beta,\beta';x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_{n-m}(\beta')_{m-n}}{m!n!}x^m y^n,$$

$$\left.\begin{aligned} x(1+x)r-(1+x)ys+\left[1-\beta+(\alpha+\beta'+1)x\right]p-\alpha yq+a\beta' z=0\\ yt-xs+(1-\beta'+y)q-xp+\beta z=0\end{aligned}\right\}\Gamma_1 \quad (3.7)$$

(ср. систему (3.7) с системой 5.9(30) из [2,7]);

E) $$\mathrm{H}_2\left(\alpha,\beta,\gamma,\delta;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n}{(\delta)_m\, m!n!}x^m y^n,$$

$$\left.\begin{aligned} x(1-x)r+xys+\left[\delta-(\alpha+\beta+1)x\right]p+\beta yq-\alpha\beta z=0\\ yt-xs+\left[1-\alpha+y\right]q+\gamma z=0\end{aligned}\right\}\mathrm{H}_2 \quad (3.8)$$

(ср. систему (3.8) с системой 5.9(33) из [2,7]);

F) $$\mathrm{H}_3\left(\alpha,\beta;\delta;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m\, m!n!}x^m y^n,$$

$$\left.\begin{aligned} x(1-x)r+xys+\left[\delta-(\alpha+\beta+1)x\right]p+\beta yq-\alpha\beta z=0\\ yt-xs+(1-\alpha)q+z=0\end{aligned}\right\}\mathrm{H}_3 \quad (3.9)$$

(ср. систему (3.9) с системой 5.9(34) из [2,7]);

G) $$\mathrm{H}_5\left(\alpha;\delta;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}}{(\delta)_m\, m!n!}x^m y^n,$$

$$\left.\begin{aligned} xr+\left(\delta-x\right)p+yq-\alpha z=0\\ yt-xs+\left(1-\alpha\right)q+z=0\end{aligned}\right\}\mathrm{H}_5 \quad (3.10)$$

(ср. систему (3.10) с системой 5.9(36) из [2,7]);

H) $\mathrm{H}_7\left(\alpha;\gamma,\delta;x,y\right)=\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{2m+n}}{(\gamma)_m(\delta)_n\, m!n!}x^m y^n,$

$$\left.\begin{aligned} x(1-4x)r-4xys-y^2t+\left[\gamma-(4\alpha+6)x\right]p-2(\alpha+1)yq-\alpha(\alpha+1)z=0\\ yt+(\delta-y)q-2xp-\alpha z=0\end{aligned}\right\}\mathrm{H}_7 \quad (3.11)$$

(ср. систему (3.11) с системой 5.9(38) из [2,7]).

Заметим, что система (3.9) заимствована [16];

I) В обеих русскоязычных изданиях [7] во втором уравнении системы для функции

$$H_1\left(\alpha,\beta,\gamma;\delta;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_{m+n}(\gamma)_n}{(\delta)_m\, m!n!}x^m y^n$$

допущена опечатка (вместо $-yxp-\beta yz$ нужно $-\gamma xp-\beta\gamma z$):

$$\left.\begin{aligned} x(1-x)r+y^2t+\left[\delta-\left(\alpha+\beta+1\right)x\right]p-\left(\alpha-\beta-1\right)yq-\alpha\beta z=0,\\ -y(1+y)t+x(1-y)s+\left[\alpha-1-\left(\beta+\gamma+1\right)y\right]q-\gamma xp-\beta\gamma z=0,\end{aligned}\right\}H_1 \quad (3.12)$$

(ср. систему (3.12) с системой 5.9(16) из [2,7]).

Таким образом, в список дифференциальных уравнений в частных производными, которым удовлетворяют гипергеометрические функции из списка Горна, входят системы, пронумерованные от 5.9(9) по 5.9(42) из [2,7], кроме систем с номерами 5.9(19), 5.9(20), 5.9(22), 5.9(30), 5.9(33), 5.9(34), 5.9(36), 5.9(38), 5.7(16), которые заменяются на вышеприведенные системы (3.4) – (3.12), соотв.

В заключение, пользуясь случаем, отметим, что О.И.Маричев [12] обратил внимание и на другие ошибки, допущенные в параграфах 5.8 и 5.11 [2,7].

А) Список Горна слишком обширен, поэтому в параграфе, посвященном интегральным представлениям, указаны интегральные представления лишь для функций Аппеля, определенных равенствами (2.4) – (2.7), но надо иметь в виду, что подобные представления существуют для всех функций Горна. Однако, в одном из двух интегральных представлений для функции F_2 имеется опечатка. В формуле 5.8(6) место $(-t)^{\rho}$ нужно $(-t)^{-\rho}$, так что в этом случае правильной будет следующая формула [12] (см. также [15, стр. 280, фор. (20)])

$$F_2\left(\alpha,\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y\right)=\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\rho')\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi i)^2}\times$$

$$\times\int(-t)^{-\rho}(t-1)^{-\rho'}F\left(\rho,\beta;\gamma;\frac{x}{t}\right)F\left(\rho',\beta';\gamma';\frac{y}{1-t}\right)dt,$$

где $\rho+\rho'=\alpha+1$ и путь интегрирования является двойной петлей Похгаммера $(1+,0+,1-,0-)$ такой, что вдоль нее $|t|>|x|$ и $|1-t|>|y|$.

В) Поскольку число гипергеометрических функций второго порядка от двух переменных велико (список Горна), полное множество их преобразований исчисляется сотнями. В §5.11 [2,7] приводятся немногие из них. В формулах аналитического продолжения для функций Аппеля F_3 и F_4, определенных равенствами (2.6) и (2.7), соответственно, имеются опечатки [12]. В формуле 5.11(9) вместо $(-y)^{\beta}$ нужно $(-y)^{-\beta}$, а в формуле 5.11(10) вместо $(1-y)^{-\mu}$ нужно $(-y)^{-\mu}$. Так что в этих случаях правильными будут следущие формулы аналитического продолжения [12] (см. также [15, стр. 296-297, фор. (68) и (69)]):

$$F_3\left(\alpha,\alpha',\beta,\beta';\gamma;x,y\right)=\sum\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho-\lambda)\Gamma(\sigma-\mu)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma)\Gamma(\gamma-\lambda-\mu)}(-x)^{-\lambda}(-y)^{-\mu}\times$$

$$\times F_2\left(\lambda+\mu+1-\gamma,\lambda,\mu,\lambda+1-\rho,\mu+1-\sigma;\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right),$$

$$F_4\left(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';x,y\right)=\frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma'-\alpha)\Gamma(\beta)}(-y)^{-\alpha}F_4\left(\alpha,\alpha+1-\gamma';\gamma,\alpha+1-\beta;\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma'-\alpha)\Gamma(\alpha)}(-y)^{-\beta}F_4\left(\beta+1-\gamma',\beta;\gamma,\beta+1-\alpha;\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right),$$

где сумма состоит из четырех слагаемых, в которых $\lambda,\ \mu,\ \rho,\ \sigma$ равны соответственно $\alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta';\ \alpha,\ \beta',\ \beta,\ \alpha';\ \beta,\ \alpha',\ \alpha,\ \beta'$, и $\beta,\ \beta',\ \alpha,\ \alpha'$.

Литература:

1. Appell P. and Kampé de Fériet J. Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques; Polynômes d'Hermite. Paris: Gauthier – Villars, 1926. — 448 p.

2. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions, Vol. I. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1953. 302 p.

3. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions, Vol. II. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1953. 396 p.

4. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Higher Transcendental Functions, Vol. III. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955. 292 p.

5. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Tables of integral transforms, Vol. I. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1954. 392 p.

6. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. Tables of integral transforms, Vol. II. McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1954. 452 p.

7. Бейтмен А., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. — Москва: Наука, 1965 (1-е изд.), 1973 (2-е изд.). — 296 с.

8. Бейтмен А., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 2. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. — Москва: Наука, 1966 (1-е изд.), 1974 (2-е изд.). — 296 с.

9. Бейтмен А., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 3. Эллиптические функции и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.— Москва: Наука, 1967. — 300 с.

10. Бейтмен А. Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. Москва: Наука, 1969. 344 с.

11. Бейтмен А. Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. Москва: Наука, 1970. 328 с.

12. Маричев О.И. Два уравнения Волтерра с функциями Горна. ДАН СССР, 1976, том 204, № 3. С. 546-549.

13. Маричев О.И. Сингулярные краевые задачи для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца. ДАН СССР, 1976, том 230, № 3. С. 523-526.

14. Маричев О.И. Интегральное представление решений обобщенного двуоссимметрического уравнения Гельмгольца и формулы его обращения. Дифференциальные уравнения, 1978, том 14, № 10. С. 1824-1831.

15. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.

16. Волкодавов В.Ф., Быстрова О.К. Построение функций Римана – Адамара для одного вырождающегося уравнения. Дифференциальные уравнения, 1991, том 27, № 8. С. 1444-1446.

17. Horn J. Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen//Math.Ann. 1889, No.34. P. 544-600.

18. Horn J. Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen. Math. Ann., 1931, vol. 105, p. 381-407.

19. Humbert P. The confluent hypergeometric functions of two variables. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1920-21, vol. 41, p. 73-96.

20. Borngässer L. Über hypergeometrisce Funktionen zweier Varänderlichen. Dissertation, Darmstadt, 1933.