ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

1-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК 517.946.6

КАПУТО ОПЕРАТОРИ ҚАТНАШГАН ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН БИР НОЛОКАЛ МАСАЛА ҲАҚИДА

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER MIXED TYPE EQUATION WITH THE CAPUTO OPERATOR

М.Жалилов, Г.Каюмова

Аннотация

Мақолада Капуто маъносидаги каср ҳосилали тўртинчи тартибли аралаш турдаги тенглама тўғри тўртбурчакли соҳа учун нолокал масала ўрганилган. Ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида қаралаётган масала регуляр ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема исботланган.

Аннотация

В данной статье для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с дробной производной Капуто в прямоугольной области изучается нелокальная задача. С помощью метода разделения переменных доказывается теорема о единственности и существовании регулярного решения этой задачи.

Annotation

This article explores the nonlocal problem of the fourth-order mixed-type equation of fructional derivativies in the meaning of Kaputo in the domain of rectangle. The theorem on the existence and uniqueness of a regular solution of a problem to be considered by the method of separation of variables is proved.

Таянч сўз ва иборалар: *аралаш турдаги тенглама, каср тартибли дифференциал оператор, Миттаг-Леффлер функцияси, тўлалик, Фурое қатори.*

Ключевые слова и выражения: *уравнение смешанного типа, оператор дробного дифференцирования, функция Миттаг-Леффлера, полнота, ряд Фурье.*

Keywords and expressions: *mixed type equation, fractional differential operator, Mittag-Leffler function, completeness, Fourier series.*

1. Постановка задачи.

Для уравнения

$$Lu=0,\ \ Lu=\begin{cases}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+{}_C D_{0t}^{\alpha}u,\ t>0,\\[2mm] \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ t<0\end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,-p<t<q\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача N. Требуется найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}$, вместе с производными, приведенными в краевых условиях;

2) $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $\Omega^+\cup\Omega^-$;

3) $u(x,t)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(0,t)=0,u(1,t)=0,u_{xx}(0,t)=0,u_{xx}(1,t)=0,-p\le t\le q, \tag{2}$$

$$u(x,-p)-u(x,q)=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция;

4) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию склеивания

М.Жалилов *− ФерГУ, преподаватель.*
Г.Каюмова *− Каршинский инженерно-экономический институт, преподаватель.*

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,+0) = \frac{\partial u(x,-0)}{\partial t},\ 0 < x < 1 \cdot \tag{4}$$

Здесь $p, q > 0$-заданные действительные числа, , $\Omega^{+} = \Omega \cap (\mathrm{t} > 0)$, $\Omega^{-} = \Omega \cap (\mathrm{t} < 0)$, а ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ -оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, которая определяется следующим образом [1,523]:

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau,\ t > 0 \cdot $$

Отметим, что по построению различных моделей задач теоретической физики с применением дробного исчисления изложены в работах [2,505], а более подробный обзор, посвящённый приложению дробного исчисления в прикладных задачах, приведен в работе [3,256].

Нелокальное условие типа (3) имеет место при моделировании задач обтекания профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной [4]. Исследование краевых задач для уравнения в частных производных высокого порядка обусловлено тем, что такие задачи возникают при моделировании явлений диффузии в физике твёрдых тел, при исследовании колебаний балок и пластин в механике [5,472].

Сначала при определенных условиях на *p* и *q* докажем единственность решения задачи N.

2. Единственность решения задачи N.

Покажем, что однородная задача имеет только тривиальное решение. Пусть $u(x,t)-$ решение задачи (2)-(4). Рассмотрим функции

$$ u_n(t) = \sqrt{2} \int_0^1 u(x,t) \sin(\pi n x) dx, n = 1,2,3... \cdot \tag{5}$$

На основании (5) введем функции $\vartheta_{\varepsilon}(t) = \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u(x,t) \sin(\pi n x) dx,$

где $\varepsilon -$ достаточное малое число.

Применяя оператор ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ к обеим частям равенства (5) по t при $t \in (0;q)$ и дифференцируя равенства (5) по t два раза при $t \in (-p;0)$, а также учитывая уравнение (1), получим

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} \vartheta_{\varepsilon}(t) = \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) \sin(\pi n x) dx = -\sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t) \sin(\pi n x) dx, t > 0, \tag{6}$$

$$ \vartheta''_{\varepsilon}(t) = \sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{tt}(x,t) \sin(\pi n x) dx = -\sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t) \sin(\pi n x) dx, t < 0. \tag{7}$$

В (6) и (7), интегрируя по частям четыре раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом граничных условий (2), получим

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u_n^{+}(t) + \lambda_n^4 u_n^{+}(t) = 0, \tag{8}$$

$$ \frac{d^2}{dt^2} u_n^{-}(t) + \lambda_n^4 u_n^{-}(t) = 0,\ \lambda_n = \pi n. \tag{9}$$

Дифференциальные уравнения (8) и (9) имеют общие решения

$$ u_n(t) = \begin{cases} A_n E_{\alpha}(-\lambda_n^4 t^{\alpha}), t > 0, \\ B_n \sin \lambda_n^2 t + L_n \cos \lambda_n^2 t, t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где A_n, B_n, L_n – произвольные постоянные,

$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ z \in C,\ \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ – функция Миттаг–Леффлера [1].

Удовлетворяя (10) условиям склеивания (4), получим $A_n = L_n$ и $B_n = -\lambda_n^2 L_n$. С учетом последних равенств функции (10) принимают вид

$$u_n(t) = \begin{cases} L_n E_\alpha(-\lambda_n^4 t^\alpha),\ t > 0, \\ L_n\left(\cos\lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin\lambda_n^2 t\right),\ t < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Теперь для нахождения постоянных L_n воспользуемся нелокальным условием (3) и формулой (5):

$$u_n(-p) - u_n(q) = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi nx = \varphi_n,\ 0 \le x \le 1. \tag{13}$$

Тогда из (13) на основании (12) получим

$$L_n = \frac{\varphi_n}{\Delta_{p,q}(n)} \tag{14}$$

при условии, что при всех $n \in N$

$$\Delta_{p,q}(n) = \lambda_n^2 \sin\lambda_n^2 p + \cos\lambda_n^2 p - E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha) \ne 0,\ \lambda_n = \pi n,\ n = 1,2,.... \tag{15}$$

Подставляя (14) в (12), найдем окончательный вид функций $u_n(t)$:

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_n}{\Delta_{p,q}(n)} E_\alpha(-\lambda_n^4 t^\alpha),\ t > 0, \\ \frac{\varphi_n}{\Delta_{p,q}(n)}\left(\cos\lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin\lambda_n^2 t\right),\ t < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$ и при всех $n \in N$ выполнении условия (15). Тогда $\varphi_n = 0, n = 1,2,...$ и из формул (16) и (5) следует, что

$$\int_0^1 u(x,t)\sin(\pi nx)dx = 0,\ n = 1,2,....$$

Отсюда, в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{2}\sin\pi nx\right\}$ в пространства $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $t \in [-p,q]$. Поскольку $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

Пусть при некоторых p,q и $n = m$ нарушение условие (15), т. е. $\Delta_{p,q}(m) = 0$.

Тогда однородная задача (2)-(4) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_m(x,t) = \begin{cases} E_\alpha(-\lambda_n^4 t^\alpha)\sin\pi mx,\ t > 0, \\ \left(\cos\lambda_m^2 t - \lambda_m^2 \sin\lambda_m^2 t\right)\sin\pi mx,\ t < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности:

Теорема 1. Пусть *p* - число, такое, что имеет место неравенство **(**15). Тогда, если существует регулярное решение задачи N, то оно единственно.

Представим выражение Δ_n в следующем виде:

$$\Delta_{p,q}(n)=\sqrt{1+\lambda_n^4}\sin\left(\lambda_n^2 p+\gamma_n\right)-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha), \tag{18}$$

где $\gamma_n=\arcsin\left(1/\sqrt{1+\lambda_n^4}\right)\to 0$ при $n\to+\infty$. Из представления (18) видно, что $\Delta_n=0$ только в том случае, когда

$$p=\frac{1}{\lambda_n^2}\left[(-1)^k\arcsin\frac{E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)}{\sqrt{1+\lambda_n^4}}+\pi k-\gamma_n\right], k=1,2,\ldots \tag{19}$$

Поскольку Δ_n является знаменателем дроби (14), то для обоснования существования решения задачи N необходимо показать, что существуют числа p и q такие, что при больших n выражение Δ_n отделено от нуля.

Лемма 1. Если p -любое положительное иррациональное число и q - любое положительное действительное число, то при больших n существует положительная постоянная C_0 такая, что справедлива оценка

$$\left|\Delta_{p,q}(n)\right|\ge C_0>0. \tag{20}$$

Доказательство. 1) Пусть $p=\dfrac{a}{\pi}, a\in N.$ Тогда из (18) при всех n имеем

$$\left|\Delta_{p,q}(n)\right|\ge\left|\pm1-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)\right|\ge\left|1-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)\right|>1-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)=C_1>0$$

при любом фиксированном $q>1$. Отметим, что функция $E_\alpha(-x)$ вполне монотонная при $x\in R$, $E_\alpha(0)=1$ и $E_\alpha(-\infty)=0$.

2) Пусть теперь $p=\dfrac{a}{b\pi}$, где $a,b\in N,(a,b)=1$. Разделим $n^2\cdot a$ на b с остатком: $n^2a=sb+r,\ s,r,\in N\cup\{0\},0\le r<b.$ Тогда из (18) получим

$$\left|\Delta_{p,q}(n)\right|\ge\left|\sqrt{1+\lambda_n^4}(-1)^s\sin\left(\frac{\pi r}{b}+\gamma_n\right)-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)\right|.$$

Если $r=0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю 1). Пусть $r>0$. Поскольку $\gamma_n\to0$ при $n\to+\infty$, то существует постоянная $n_1>0$, такая, что при всех $n>n_1$ имеет место неравенство $\gamma_n<\dfrac{\pi}{2b}$. Тогда

$$\left|\Delta_{p,q}(n)\right|\ge\left|\sqrt{1+\lambda_n^4}\sin\left(\frac{\pi r}{b}+\gamma_n\right)-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)\right|\ge\sqrt{1+\lambda_k^4}\left|\sin\left(\frac{\pi r}{b}+\gamma_n\right)\right|-E_\alpha(-\lambda_n^4 q^\alpha)>$$

$$>\lambda_n^2\left|\sin\left(\frac{\pi(b-1)}{b}+\frac{\pi}{2b}\right)\right|-1=\lambda_n^2\sin\frac{\pi}{2b}-1\ge n^2C_2\ge C_2>0$$

при $n>\max\{n_0,n_1,n_2\},n_2\ge\dfrac{1}{\sqrt{\pi^2\sin\dfrac{\pi}{2b}-C_2}},0<C_2<\pi^2\sin\dfrac{\pi}{2q}$

и при любом $b>0$.

Отметим, что в случае, когда p является рациональным числом, тогда в силу (19) нулей выражения Δ_n, не удается установить аналог оценки (20).

Теперь при выполнении оценки (20) определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ и число p покажем, что функция

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\sin\pi nx, \tag{21}$$

где $u_n(t)$ определяются формулой (16) будет решением задачи N.

Лемма 2. Пусть выполнены условие (15) и оценка (20). Тогда при всех $n\in N$ справедливы оценки

$$|u_n(t)|\le M_1|\varphi_n|,\ \left|{}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(t)\right|\le M_2n^4|\varphi_n|,\ t\in[0,q];$$

$$|u_n(t)|\le M_3n^2|\varphi_n|,\ |u'_n(t)|\le M_4n^4|\varphi_n|,\ |u''_{ni}(t)|\le M_5n^6|\varphi_n|,\ t\in[-p,0],$$

где $C_i -$ здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость утверждения леммы на основании леммы 1 следует из (16).

3. Существование решения задачи А.

Докажем существование решения задачи. Имеет место:

Теорема 2. Пусть выполнены условия (15), (20), функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi(x)\in C^6[0,1],\varphi^{(7)}(x)\in L_2(0,1),\ \varphi^{(2k)}(0)=\varphi^{(2k)}(1)=0,\ k=\overline{0,3}.$$

Тогда решение задачи N существует.

Доказательство. Решение уравнения (1) в области Ω ищем в виде $u(x,t)=X(x)T(t)\ne 0$. Подставляя это выражение в уравнение (1), учитывая краевые условия (2) относительно $X(x)$ получим задачу

$$X^{IV}(x)-\lambda^4X(x)=0,\ X(0)=X(1)=X''(0)=X''(1)=0. \tag{22}$$

Задача (22) – самосопряжённая, имеет полную в $L_2(0,1)$ систему собственных функций, которая имеет вид $\left\{\sqrt{2}\sin\lambda_nx\right\}$. Теперь решение задачи N в области Ω ищем в виде

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\pi nx \tag{23}$$

где $u_n(t)$ - неизвестная функция.

Решения (23) удовлетворяем условиям (3). Разложим функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ задачи (22):

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin(\pi nx),\varphi_n=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin(\pi nx)dx. \tag{24}$$

Подстановка (23) в (1) приводит к уравнениям (8), (9), решения которых согласно лемме 2 имеют вид (16).

Теперь, формально из (23), почленным дифференцированием составим ряды

$${}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}{}_C D_{0t}^{\alpha}u_n(t)\sin\pi nx, t>0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^k u_n(t)\sin\left(\pi nx + \frac{\pi k}{2}\right), k=\overline{1,4}, t>0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\sin \pi nx, t<0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\pi n)^k u_n(t)\sin\left(\pi nx + \frac{\pi k}{2}\right), k=\overline{1,4}, t<0. \quad (28)$$

Учитывая леммы 1,2 нетрудно видеть, что ряды (27)-(28) мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} n^6 |\varphi_n|$, сходимость которого легко следует из условий теоремы, наложенные на функцию $\varphi(x)$ Действительно, учитывая соотношение $\varphi_n = \frac{1}{(\pi n)^7}\varphi_n^{(7)} = -\frac{\sqrt{2}}{(\pi n)^7}\int_0^1 \varphi^{(7)}(x)\cos(\pi nx)dx$,

получим, что этот ряд оценивается рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\varphi_n^{(7)}|$. Так как $\frac{1}{n}|\varphi_n^{(7)}| \le \frac{1}{n^2} + |\varphi_n^{(7)}|^2$,

то последний ряд сходится и значить, по теореме Вейерштрасса также абсолютно и равномерно сходится ряды (25)-(28) соответственно в областях $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$.

Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (23) удовлетворяет условию (3). Подставляя, теперь ряды (25)-(28) в уравнение (1) при $t \neq 0$ убеждаемся, в том, что функция (23) также удовлетворяет уравнению (1).

Литература:

1. Cilbas A.A, Sirivastava, H.M. Turijilo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics studies, 204. Elsevier Science B. M.− Amsterdam, 2006. xvi.

2. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Publisher Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. KG , Publication City/Country Berlin, Germany. 2011.

3. Васильев В.В., Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание. - Киев, НАН Украины, 2008. − ISBN 978-966-02-4384-2

4. Юнусова Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа , Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. 2011. № 8(89).

5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле.− М.: Машиностроение, 1985.

(Рецензент: А.Уринов – доктор физико-математических наук, профессор).