ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

1-2020

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК: 51+517.9

БЕССЕЛЬ ОПЕРАТОРИ ҚАТНАШГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ ФУНДАМЕНТАЛ ЕЧИМЛАРИ ҲАҚИДА

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

ON FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH THE BESSEL OPERATOR

Ш.Каримов, О.Ахмаджонова

Аннотация

Мақолада Бессель оператори қатнашган оддий дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимини топиш усули баён қилинган.

Аннотация

В статье изложен метод нахождения фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения с оператором Бесселя.

Annotation

In the article, the method of finding the fundamental solution of an ordinary differential equation with the Bessel operator is described.

Таянч сўз ва иборалар: *Бессель оператори, фундаментал ечим, Дирак-Киприянов функционали, Бессель-Клиффорд функцияси.*

Ключевые слова и выражения: *оператор Бесселя, фундаментальное решение, функция Дирака-Киприянова, функция Бесселя-Клиффорда.*

Keywords and expressions: *Bessel operator, fundamental solution, Dirac-Kipriyanov function, Bessel-Clifford function.*

Маълумки, Лаплас операторининг фундаментал ечими радиал функция бўлади, уни бир ўзгарувчили функция сифатида қараш қулай. Шунинг учун бундай ечимни излашда оддий дифференциал тенгламаларнинг фундаментал ечимларига олиб келиш мақсадга мувофиқ. Бу ердаги қийинчилик сферик алмаштиришларни бажарганимизда

$$\Delta u(x)=\delta(|x|),\quad \Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

тенгламани ушбу

$$B_{n-1}u(r)=\delta_{n-1}(r),\qquad B_{n-1}=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\,\frac{d}{dr}$$

Бессель оператори қатнашган тенгламага келтиришидадир.

Математик физиканинг классик курсларида охирги тенглама учун фундаментал ечимлар формулалари келтирилмаган, бунинг сабабини аниқлаш учун қуйидаги иккита изоҳ келтирамиз:

1. R^n даги радиал функциялар учун оддий скаляр кўпайтма

$$(f,q)=\int_{R^n} f(|x|)q(|x|)dx=|S_1(n)|\int_0^\infty f(r)q(r)r^{n-1}dr,\ |S_1(n)|=\int_{|x|=1}dS=\frac{x^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

кўринишга эга. Бундан кўриниб турибдики, уни бир ўзгарувчили функциялар скаляр кўпайтмасининг чизиқли вазнли шакли

Ш. Каримов*– ФарДУ, физика-математика фанлари доктори.*
О.Ахмаджонова*– ФарДУ, II курс магистранти.*

$$(f,g)_\gamma = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{g}(t) t^\gamma dt, \qquad \gamma = n-1\ , \tag{1}$$

кўринишида қараш мумкин [1].

2. δ- Дирак функциясининг координата боши атрофида узлуксиз бўлган ихтиёрий функцияга таъсири $(f,\delta) = f(0)$ функционал сифатида аниқланади. Бунда Диракнинг δ функциясини R^n даги радиал функциялар δ -симон кетма-кетлигининг лимити сифатида қараш мумкин. У ҳолда сферик координаталарда бу ҳолат

$$f(0) = (f,\delta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R_n} f(|x|)\delta_\varepsilon(|x|)dx = |S_1(n)|\int_0^\infty f(r)\delta^*(r)r^{n-1}dr$$

кўринишга эга бўлади. Юқоридаги тенгликнинг ўнг томонини $(f,\delta) = f(0)$ классик маънодаги δ –дельта функция сифатида қараш мумкин эмас, чунки бу ҳолатда тенгликнинг чап томони *f*(0) га, ўнг томони эса нолга тенг бўлади.

Юқоридаги иккита изоҳдан келиб чиқиб, вазнли синфлар учун дельта- функцияни

$$\delta_\gamma : (f,\delta_\gamma)_\gamma = \int_0^\infty f(x)\delta_\gamma(x)x^\gamma dx = f(0) \tag{2}$$

каби аниқлаймиз. Ундан эса радиал функциялар синфида Дирак функционали:

$$(f,\delta) = |S_1(n)|\int_0^\infty f(r)\frac{1}{|S_1(n)|}\delta_{n-1}(r)r^{n-1}dr = f(0),$$

яъни δ* сифатида $\dfrac{1}{|S_1(n)|}\delta_{n-1}$ ни олишимиз кераклиги келиб чиқади, бу ерда δ_{n-1} эса γ=*n*-1 бутун индексга мос келувчи Дирак-Киприянов [2] функционали.

Юқорида келтирилганларнинг татбиғи сифатида иккинчи тартибли ушбу

$$L\left(B_\gamma\right)u(t) \equiv B_\gamma u(t) + a_1\frac{d}{dt}u(t) + a_2 u(t), \qquad t>0$$

сингуляр дифференциал операторни қарайлик, бу ерда $a_1,\ a_2 \in R$,

$$B_\gamma = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\ \frac{d}{dt}.$$

Бўлаклаб интеграллаш натижасида

$$(Lu,\varphi)_\gamma = (u, L^*\varphi)_\gamma$$

тенгликни топамиз. Бу ерда

$$L^* = B_\gamma - \frac{a_1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}t^\gamma + a_2 \tag{3}$$

- $L^*(B_\gamma)$ (1)- вазнли скаляр кўпайтмага нисбатан қўшма оператор.

$L(B_\gamma)$ операторнинг фундаментал ечими ушбу

$$L(B_\gamma)\,E(t) = \delta_\gamma(t)$$

тенгликни ёки бошқача айтганда

$$(E, L^{*}\varphi)_{\gamma} = \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in S_{ev}[0,+\infty)\ , \tag{4}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $E \in S'_{ev}$ умумлашган функциядир, бу ерда $S_{ev}([0,\infty))$ - Шварцнинг асосий функциялари фазосининг қисм фазоси бўлиб, у бир ўзгарувчили жуфт функциялардан иборат ([3]).

1-*теорема*. *Айтайлик Z(t) –жуфт функция бўлиб, t=0 нуқтада*

$$\lim_{t\to 0} t^{\gamma} Z(t) = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{t\to 0} t^{\gamma} \frac{d}{dt} Z(t) = 1 \tag{6}$$

ва $\lim\limits_{t\to\infty} t^{\gamma} B_{\gamma} Z(t) < \infty$ *шартлар ўринли бўлсин.*

Агар {t>0} соҳада Z=Z(t) функция иккинчи тартибли бир жинсли ушбу

$$L(B_{\gamma}) Z(t) = 0 \tag{7}$$

сингуляр дифференциал тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда вазнли умумлашган S_{ev} *функциялар маъносида Z функция L операторнинг фундаментал ечими бўлади.*

Исбот. (4) тенгликнинг тўғри эканлигини исботлаймиз.

$$B_{\gamma} = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}$$

Бессель операторини

$$B_{\gamma} = \frac{1}{t^{\gamma}}\frac{d}{dt} t^{\gamma} \frac{d}{dt}$$

каби ёзиш қулай (бу Бессель операторининг дивергент шакли).

Айтайлик, $\varphi \in S_{ev}([0,\infty))$ ўринли бўлсин. (3) даги қўшма операторнинг биринчи қўшилувчисини қарайлик. Бўлаклаб интеграллаш натижасида

$$(Z, B_{\gamma}\varphi)_{\gamma} = \lim_{t\to +0} t^{\gamma}\varphi'(t) Z(t) - \int_0^{\infty} Z'(t) t^{\gamma} \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = -\int_0^{\infty} Z'(t) t^{\gamma} \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда (5) шартдан фойдаландик. Яна бир марта бўлаклаб, интеграллаб ва (6) шартни ҳисобга олиб

$$(Z, B_{\gamma}\varphi)_{\gamma} = \lim_{t\to +0} t^{\gamma}\varphi(t) Z'(t) + \int_0^{\infty} (B_{\gamma}Z)(t)\varphi(t) t^{\gamma} dt =$$

$$= \varphi(0) + \int_0^{\infty} (B_{\gamma}Z)(t)\varphi(t) t^{\gamma} dt$$

ни ҳосил қиламиз.

Энди (3) даги қўшма операторнинг иккинчи қўшилувчисини қараймиз. Айнан юқоридаги каби ишларни бажариб,

$$\left(Z, -\frac{a_1}{t^{\gamma}}\frac{d}{dt}(t^{\gamma}\varphi(t)) \right)_{\gamma} = \int_0^{\infty} Z'(t)\varphi(t) t^{\gamma} dt$$

ни ҳосил қиламиз. Демак,

$$(Z, L^*(B_\gamma)\varphi)_\gamma = \varphi(0) + \int_0^\infty (L(B_\gamma)Z)(t)\varphi(t)t^\gamma\, dt.$$

Z(t) функциянинг (7) бир жинсли тенгламанинг ечими эканлигидан фойдалансак, у ҳолда (4) нинг ўринли эканлиги келиб чиқади. якунланди.
1-теорема исботланди.

Изоҳ. Бу теоремани ўзгармас коэффициентли оддий дифференциал тенгламанинг фундаментал ечими билан солиштириш қизиқарли:

Маълумки, агар *Z*(*t*) функция $LZ(t) = 0$ бир жинсли тенгламанинг ечими бўлса ва

$$Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1, \tag{8}$$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\mathrm{E}(t) = \theta(t)Z(t)$$

функция *L* операторнинг фундаментал ечими бўлади, бу ерда $\theta(t)$-Хевисайд функцияси. (8) бошланғич шартлар ўрнида теоремада вазнли бошланғич шартлар келади, улардан бири нолдан фарқли эканлигидан ечимнинг координаталар бошида махсусликка эга эканлиги, уларнинг тартиби эса (5) ва (6) билан аниқланиши келиб чиқади.

Мисол сифатида Бессель операторининг фундаментал ечимини топишни қараб чиқамиз.1-теоремадан фойдаланиб, фундаментал ечимни топиш усули жуда содда.
Ушбу

$$B_\gamma E(x) = \delta_\gamma, \quad \delta_\gamma : (\delta_\gamma, \varphi)_\gamma = \varphi(0), \tag{9}$$

тенгламанинг ечими теорема шартларига жавоб берадиган функция сифатида аниқланади, яъни бу функция $E(x) = O(x^{1-\gamma})$ ва $B_\gamma E(x) = 0$ бир жинсли тенгламани қаноатлантирсин.

$R^1 \setminus \{0\}$ соҳада $E(x) = A_\gamma |x|^{1-\gamma}$ функцияси $B_\gamma E(x) = 0$ бир жинсли тенгламани қаноатлантиришини кўрсатиш осон. $\gamma \neq 1$ учун (6) ва (7) вазнли бошланғич шартлар $A_\gamma = \dfrac{1}{1-\gamma}$ ўзгармасни топиш имконини беради. Демак, $\gamma \neq 1$ бўлганда $E(x) = \dfrac{|x|^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ функция Бессель операторининг фундаментал ечими бўлади.

Айтайлик $\gamma = 1$ бўлсин. Юқоридаги каби $E(x) = \ln|x|$ функция бу $B_1 E(x) = 0$ бир жинсли тенгламанинг ечими бўлишини кўрсатиш қийин эмас. Бу функция теорема шартини қаноатлантиради ва шунинг учун Бессель операторининг фундаментал ечими бўлади.

Худди шу усул B_γ^m операторига *m*= 1, 2, 3, ..., бўлганда қўлланилади ва қуйидагича натижани беради.

2-теорема . Агар $(\gamma+1)/2$ натурал сон бўлмаса, у ҳолда

$$E_{\gamma,m}(x) = \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2} - m\right)}{2^{2m}\Gamma(m)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} |x|^{2m-1-\gamma}$$

функция сингуляр коэффициентли B_γ^m γ> 0, m = 1, 2, 3, ..., дифференциал оддий операторнинг фундаментал ечими бўлади.

Агар $(\gamma+1)/2$ сони натурал сон бўлса, у ҳолда $E_{\gamma,m}(x)$ учун қуйидаги икки хил ифода келиб чиқади.

а) 2 m <γ + 1 бўлганда

$$E_{\gamma,m}(x)=\frac{(-1)^m\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}-m\right)}{2^{2m}\Gamma(m)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}|x|^{2m-1-\gamma};$$

б) 2 m >γ + 1 бўлганда

$$E_{\gamma,m}(x)=\frac{(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^{2m}\Gamma(m)\Gamma\left(m+1-\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}|x|^{2m-1-\gamma}\ln|x|.$$

$L(B_\gamma)\equiv B_\gamma+a^2$ **операторнинг фундаментал ечими**.

Одатда $B_\gamma u+u=0$ тенглама Бессель тенгламаси, деб номланади. Унинг ечимлари

$$x^2\frac{d^2\upsilon}{dx^2}+x\frac{d\upsilon}{dx}+\left(x^2-\nu^2\right)\upsilon=0, \qquad \nu=(\gamma-1)/2,$$

классик Бессель тенгламасининг ечимлари билан боғлиқ, бу ерда $u(x)=(\upsilon(x))/x^\gamma$.

Бессел тенгламаси иккита чизиқли боғлиқ бўлмаган J_ν va $J_{-\nu}$ ечимларга эга ([4] 7-боб 7 сек,7.2.1) . Шунинг учун (7) тенглама ҳам иккита чизиқли $\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ va $\frac{J_{-\nu}(x)}{x^\nu}$ боғлиқ бўлмаган ечимга эга. Биринчи ечим $j_\nu=j_{\frac{\gamma-1}{2}}=c(\nu)\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ - Бессель j-функцияси ёки Бессель-Клиффорд функцияси, деб номланади ва у $x=0$ да чегараланган ($j_\nu(0)=1$ хоссага кўра). Иккинчи ечим $A_\nu\frac{J_{-\nu}(x)}{x^\nu}$ ушбу $O\left(x^{1-\gamma}\right)$, $x\to0$ кўринишидаги махсусликка эга. Бу ечим 1-теорема шартларини қаноатлантиради. (9) тенглама учун шартлар ушбу

$$\lim_{x\to0}x^\gamma A(\nu)\frac{J_{-\nu}}{x^\nu}=0, \quad \lim_{x\to0}x^\gamma A(\nu)\left(\frac{J_{-\nu}}{x^\nu}\right)'=1, \quad \nu=(\gamma-)/2$$

тенгликлар билан ифодаланади.

Ушбу шартлардан биринчиси бажарилади, чунки

$$x^\gamma A(\nu)\frac{J_{-\nu}}{x^\nu}=x^{2\nu+1}A(\nu)\frac{2^\nu}{x^{2\nu}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\Gamma(m-\nu+1)}\to0, \quad x\to0.$$

Иккинчи тенгликдан қуйидаги

$$A(\nu)=\frac{\Gamma(-\nu)}{2^{\nu+1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)}{2^{\frac{\gamma+1}{2}}}.$$

тенглик келиб чиқади.

Маълумки, фундаментал ечим ягона эмас ва бир жинсли тенглама ечими аниқлигида топилади. Бу эса биз қидираётган тенглама ечимини Нейман функцияси (тегишли даражада нормаллаштирилган) шаклида ифодалашга имкон беради. Қуйидаги натижалар ўринли:

3-теорема Ушбу $\nu=(\gamma-1)/2\neq 0,1,2,..,(\gamma\neq 1,3,5,...)$ учун $L(B_\gamma)=B_\gamma+a^2$ операторининг фундаментал ечими қуйидаги шаклга эга:

$$E_{B_\gamma}(x)=\frac{\alpha^\nu\Gamma(-\nu)}{2^{\nu+1}}\frac{J_{-\nu}(ax)}{x^\nu}$$

ва у Y_ν Нейман функцияси формуласи билан қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$E_{B_\gamma}(x)=\frac{\alpha^\nu\pi}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\frac{Y_\nu(a|x|)}{|x|^\nu},\qquad \nu=\frac{\gamma-1}{2},$$

бундан ташқари, агар $\gamma=2k+1$, $k=\nu=0,1,2,3,...,$ бўлса, у ҳолда

$$E_{B_{2k+1}}(x)=-\frac{\pi}{k!2^{k+1}(ax)^k}Y_k(ax),$$

бўлади, бу ерда Y_k - бутун тартибли Нейман функцияси $\nu=k,\quad k=0,1,2,...$ (қаранг [4], 7, 7.2.4 бобдаги (31) формула)

$$\lim_{\nu\to k}Y_\nu(z)=Y_k(z)=\frac{2}{\pi}J_k(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m-k}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{k+2m}}{m!(m+k)!}\left(\sum_{s=1}^{k+m}\frac{1}{s}+\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p}\right),$$

$$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}\right),$$

бу ерда C - Эйлер ўзгармаси (тахминан 0,5772157 ... га тенг).

Адабиётлар:

1. Ляхов Л. Н.. Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя. − 2012 г.

2. Райхельгауз Л.Б. Полное преобразование Фурье-Бесселя и сингулярные дифференциальные операторы с D_B – оператором Бесселя. Диссерт...., канд.физ.мат.наук. − Воронеж, ВГУ. 2011.

3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Изд. –М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. − М.: Наука, 1974.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).