O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 yildan nashr etiladi
Yilda 6 marta chiqadi

1-2022

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Muassis: Farg‘ona davlat universiteti.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» “Scientific journal of the Fergana State University” jurnali bir yilda olti marta elektron shaklda nashr etiladi.

Jurnal filologiya, kimyo hamda tarix fanlari bo‘yicha O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlar ro‘yxatiga kiritilgan.

Jurnaldan maqola ko‘chirib bosilganda, manba ko‘rsatilishi shart.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan 2020 yil 2 sentabrda 1109 raqami bilan ro‘yxatga olingan.

Muqova dizayni va original maket FarDU tahririy-nashriyot bo‘limida tayyorlandi.

Tahririyat manzili:
150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.
Tel.: (0373) 244-44-57. Mobil tel.: (+99891) 670-74-60
Sayt: www.fdu.uz. Jurnal sayti

Bosishga ruxsat etildi:
Qog‘oz bichimi: - 60×84 1/8
Bosma tabog‘i:
Ofset bosma: Ofset qog‘ozi.
Adadi: 10 nusxa
Buyurtma №
FarDU nusxa ko‘paytirish bo‘limida chop etildi.
Manzil: 150100, Farg‘ona sh., Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.

Farg‘ona,
2022.

M U N D A R I J A

Aniq va tabiiy fanlar

Ijtimoiy-gumanitar fanlar

УДК: 51+531.551 DOI: 10.56292/SJFSU/vol28_iss1/a1

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A PARABOLIC EQUATION DEGENERATING AT THE BOUND OF THE DOMAIN

SOHA CHEGARASIDA BUZILADIGAN PARABOLIK TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALALAR

[1]Уринов Ахмаджон Кушакович, [2]Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли

[1]Уринов Ахмаджон Кушакович – д.ф.м.н., профессор, Фер.Г.У.
[2]Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли – магистр, Фер.Г.У.

Annotatsiya

Soha chegarasida buziladigan parabolik tenglama uchun chegaraviy masalalar bayon qilingan va oʻrganilgan. Masala yechimining mavjudligi, yagonaligi va turgʻunligi isbotlangan.Masala yechimining yagonali energiya integrallar usuli bilan isbotlangan. Oʻzgaruvchilarni ajratish usuli orqali, oddiy differensial tenglama uchun spektral masala hosil qilingan. Bu spektral masala Grin funksiyasi yordamida simmetrik yadroli ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasiga ekvivalent keltirilgan. Oʻrganilayotgan masalaning yechimi spektral masalaning xos funksiyalar sistemasiga nisbatan Furye qatorining yigʻindisi sifatida topilgan. Masala yechimining bahosi olingan, undan uning berilgan funksiyalarga doimiy bogʻliqligi isbotlangan.

Аннотация

В статье поставлены и исследованы краевые задачи для параболического уравнения, вырождающегося на границе области.Доказаны существование, единственность и устойчивость решения задач.Методом интегралов энергии доказана единственность решения задачи. При этом, применением метода разделения переменных к изучаемой задаче, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Далее, построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Abstract

In the work boundary value problems have been formulated and investigated for a parabolic equation degenerating at the bound of the domain. The existence, uniqueness and stability of the solution of the problem have been proved. The uniqueness of the solution of the problem was proved by the method of energy integrals. At the same time, by applying the method of separation of variables to the considered problem, a spectral problem for an ordinary differential equation has been obtained. Next, the Green's function of the spectral problem was constructed, with the help of which it is equivalently reduced to an the second kind Fredholm integral equation with a symmetric kernel. The solution of the considered problem has been written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. An estimate for solution the problem was obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Kalit soʻzlar: *chegaraviy masala, parabolik tipdagi tenglama spektral usul, Grin funksiyasi, integral tenglama.*
Ключевые слова: *краевые задачи, уравнение параболического типа, спектральный метод, функция Грина, интегральное уравнение.*
Ключевые слова: *boundary value problems, parabolic type equation, spectral method, Green's function, integral equation.*

I. Введение

Вырождающиеся дифференциальные уравнения являются одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Это можно объяснить формированием начальных и краевых задач для таких уравнений в математическом моделировании различных задач науки и техники. Начальные и краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений параболического типа возникают например при математическом моделировании задач теплопроводности и диффузии [1].

В настоящей статье в области $\Omega=\{(x,t):0<x<1;\,0<t<T\}$ рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$t^a u_t + bu = x^{\gamma}(1-x)^{\beta}u_{xx} + \alpha x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta}u_x - \beta x^{\gamma}(1-x)^{\delta-1}u_x, \qquad (1)$$

где a, b, α, γ – заданные действительные числа, причем, $0\le a<1$, $b\ge 0$; $0\le\alpha<1$, $\alpha\le\gamma<\alpha+1$, $\gamma+\alpha<2$, $0\le\beta<1$, $\beta\le\delta<\beta+1$, $\delta+\beta<2$, из которого при $a=b=\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ следует уравнение Фурье, описывающее процесс распространения тепла в однородном стержене.

Очевидно, что уравнение (1) в области Ω принадлежит параболическому типу, причем вдоль линии $x=0$ и $x=1$ порядок уравнения вырождается, а при $t=0$ оно обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение по x (с параметром t).

II. Постановка задач

Исследуем следующие краевые задачи:

Задача A. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами: 1) u, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x\in C(\overline{\Omega})$; $t^a u_t$, $x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x\right]_x\in C(\Omega)$; 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1); 3) на границе области Ω выполняются краевые условия вида

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ t\in[0,T]; \qquad (2)$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,1], \qquad (3)$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная функция.

Задача $Б$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям задачи A, когда условие (2) заменено на

$$u(0,t)=0,\ \lim_{x\to1}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)=0,\ t\in[0,T]. \qquad (4)$$

Задача B. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям задачи A, когда условие (2) заменено на

$$\lim_{x\to0}x^{\alpha}u_x(x,t)=0,\ u(1,t)=0,\ t\in[0,T]. \qquad (5)$$

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения задачи A. Исследование задач $Б$ и B проводится аналогично.

Теорема 1. A. Задача A не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи A. Их разность обозначим через $u(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1) при однородных граничных условиях: $u(0,t)=u(1,t)=0,\,u(x,0)=0$.

Возьмем произвольное число η из $(0,T]$ и введем функцию

$$V(x,t)=\begin{cases}0, & \textit{если}\ \eta\le t\le T,\\ \int\limits_{\eta}^{t}\xi^{-a}u(x,\xi)\,d\xi, & \textit{если}\ 0\le t\le\eta.\end{cases} \qquad (6)$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

1) $V(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_x(x,t)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и $V(0,t)=V(1,t)=0$;

2) $t^aV_t(x,t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и $V(x,t)=0$ при $t\in[\eta,T]$.

Умножим уравнение (1) на функцию $t^{-a}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}V(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int_0^1\int_0^T t^{-a}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\delta-\beta}\left[t^au_t+bu\right]Vdtdx=\int_0^1\int_0^T t^{-a}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\left[x^{\gamma}(1-x)^{\delta}u_{xx}+\right.$$

$$\left.+\alpha x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta}u_x-\beta x^{\gamma}(1-x)^{\delta-1}u_x\right]Vdtdx.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\gamma}dx\int_0^{\eta}u_tVdt+b\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\gamma}dx\int_0^{\eta}t^{-a}uVdt=\int_0^{\eta}t^{-a}dt\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x\right]_xVdx.$$

Применяя правило интегрирования по частям к внутренним интегралам и учитывая равенства $V(x,\eta)=0$, $u(x,0)=0$, $V(0,t)=0$, $V(1,t)=0$, имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}uV_tdt-b\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}t^{-a}uVdt=\int_0^{\eta}t^{-a}dt\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_xV_xdx. \quad (7)$$

Из (6) следует, что $V_t=t^{-a}u$ и $u_x=t^aV_{xt}$. Учитывая (7), получим равенство

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}t^{-a}u^2dt-b\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}V_tVdt=\int_0^{\eta}dt\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_{xt}V_xdx,$$

которое можно записать в виде

$$2\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}t^{-a}u^2dt=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx\int_0^{\eta}\frac{\partial}{\partial t}V_x^2dt+b\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}\frac{\partial}{\partial t}V^2dt.$$

Вычисляя внутренние интегралы, стоящие в правой части равенства, получим

$$2\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}t^{-a}u^2dt=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_x^2\Big|_{t=0}^{t=\eta}dx+b\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}V^2\Big|_{t=0}^{t=\eta}dx.$$

Отсюда, учитывая $V_x(x,\eta)=0$ и $V(x,\eta)=0$, имеем

$$2\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}dx\int_0^{\eta}t^{-a}u^2dt=-\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_x^2(x,0)dx-b\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}V^2(x,0)dx,$$

откуда, в силу $b\geq 0$, следует

$$\int_0^1\int_0^{\eta}x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}t^{-a}u^2dt\,dx=0.$$

Следовательно, $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}t^{-a/2}u(x,t)\equiv 0$ в Ω, т.е. $u(x,t)\equiv 0$ в области $\overline{\Omega}$. Тогда, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{\Omega}$. Теорема 1. A доказана.

IV. Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к поставленной задаче A возникает следующая спектральная задача:

Спектральная задача CA **.** Найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv -\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v'(x)\right]' = \lambda x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v(x),\ 0<x<1, \tag{8}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$v(x),\ x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v'(x) \in C[0,1],\ v(0)=0,\ v(1)=0. \tag{9}$$

Докажем существование собственных значений и собственных функций задачи $\{(8),(9)\}$.

Для того, чтобы найти промежуток параметра λ , при котором существует нетривиальное решение задачи $\{(8),(9)\}$, умножим обе части уравнения (8) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$:

$$-\int_0^1 \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v'(x)\right]' v(x)\,dx = \lambda \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v^2(x)\,dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (9), имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[v'(x)\right]^2 dx = \lambda \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v^2(x)\,dx.$$

Отсюда, при $v(x) \not\equiv 0$ следует, что $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует, что $v'(x)=0$, $0<x<1$. Тогда $v(x)=const$, $x\in(0,1)$, откуда в силу условия (9), получим $v(x)\equiv 0$, $0\leq x\leq 1$. Следовательно, задача $\{(8),(9)\}$ имеет нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Пусть $G_A(x,s)$ - функция Грина задачи $\{(8),(9)\}$. Согласно общей теории [2], она должна удовлетворить следующим условиям:

1) функция $G_A(x,s)$ непрерывна для всех x , $s\in[0,1]$ и удовлетворяет граничным условиям $G_A(0,s)=G_A(1,s)=0$ при $s\in(0,1)$;

2) в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$ существует непрерывная производная $(\partial/\partial x)G_A(x,s)$, а при $x=s$

$$(\partial/\partial x)G_A(x,s)\big|_{x=s+0} - (\partial/\partial x)G_A(x,s)\big|_{x=s-0} = -s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta};$$

3) в интервалах $[0,s)$ и $(s,1]$ функция $G_A(x,s)$, рассматриваемая как функции от x , удовлетворяет уравнению $MG_A(x,s)=0$.

Пользуясь общим решением уравнения $Mv=0$, нетрудно убедиться, что функция $G_A(x,s)$, обладающая этим условиям, имеет вид

$$G_A(x,s)=\begin{cases} k_1\int\limits_0^x z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\int\limits_s^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz,\ x<s; \\ k_1\int\limits_0^s z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\int\limits_x^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz,\ s<x, \end{cases} \tag{10}$$

где $k_1=\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma^{-1}(1-\alpha)\Gamma^{-1}(1-\beta)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Тогда задача CA эквивалентна интегральному уравнению вида [2]

$$v(x)=\lambda\int\limits_0^1 G_A(x,s)s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}v(s)ds. \tag{11}$$

Умножая уравнение (11) на $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}$ и введя обозначения $w(x)=x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\gamma-\delta)/2}v(x)$, $K_A(x,s)=(xs)^{(\alpha-\gamma)/2}\left[(1-x)(1-s)\right]^{(\gamma-\delta)/2}G_A(x,s)$, получим интегральное уравнение с симметричным ядром

$$w(x)=\lambda\int\limits_0^1 K_A(x,s)w(s)ds. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что при условиях, наложенных на параметры α, β, γ и δ, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 K_A^2(x,s)ds\le C_0=const<+\infty. \tag{13}$$

Согласно теории интегральных уравнений с симметричным ядром [3], интегральное уравнение (11) имеет счётное множество положительных собственных значений $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<...<\lambda_k,...$ с единственной точкой сгущения на бесконечности; им соответствуют собственные функции

$$w_1(x),w_2(x),...,w_k(x),...,$$

то есть функции

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}v_1(x),x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}v_2(x),...,x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}v_k(x),...,$$

образующие ортонормированную систему функций в пространстве $L_2(0,1)$, и что любая функция $f(x)$, представимая через ядро $K_A(x,s)$, разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по системе собственных функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ ядра $K_A(x,s)$.

Из доказанного выше следует, что числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,...$ являются собственными значениями задачи $\{(8),(9)\}$; им соответствуют собственные функции $v_1(x),v_2(x),...,v_k(x),...,$ образующие ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ с весом $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}$.

Лемма 1. A**.** Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям:

$h(0)=h(1)=0$, $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\in C[0,1]$;

$$x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]' \in L_2(0,1);$$

Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи CA:

$$h(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}h_k v_k(x), \tag{14}$$

где $h_k=\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}h(x)v_k(x)dx$.

Доказательство. Справедливо равенство

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x)=\int_0^1 K_A(x,s)s^{(\gamma-\alpha)/2}(1-s)^{(\delta-\beta)/2}\left[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\right]'ds.$$

Действительно, в силу вида функции $K_A(x,s)$ и свойства функций $G_A(x,s)$ и $h(x)$, имеем

$$\int_0^1 K_A(x,s)s^{(\gamma-\alpha)/2}(1-s)^{(\delta-\beta)/2}\left[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\right]'ds=$$

$$=\int_0^1 (xs)^{(\alpha-\gamma)/2}\left[(1-x)(1-s)\right]^{(\beta-\delta)/2}G_A(x,s)\left\{s^{(\gamma-\alpha)/2}(1-s)^{(\delta-\beta)/2}\left[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\right]'\right\}ds=$$

$$=x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}\int_0^1 G_A(x,s)\left[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\right]'ds=$$

$$=x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\gamma)/2}\left[-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)G(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1}+\right.$$

$$\left.+s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h(s)(\partial/\partial s)G_A(x,s)\Big|_{s=0}^{s=x-0}+s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h(s)(\partial/\partial s)G_A(x,s)\Big|_{s=x+0}^{s=1}\right]-$$

$$-\int_0^1 h(s)(\partial/\partial s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}(\partial/\partial s)G_A(x,s)\right]ds=x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x).$$

Следовательно, $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x)$ - есть функция, представимая через ядро $K_A(x,s)$. Тогда, в силу неравенства (13) и теоремы Гильберта-Шмидта, эта функция на отрезке $[0,1]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ядра $K_A(x,s)$:

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}h_k w_k(x),$$

т.е

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h_k v_k(x).$$

Разделив это равенство при $x\in(0,1)$ на $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}$, имеем равенство (14). Лемма 1. A. доказана.

V. Сходимостъ основных билинейных рядов

Лемма 2. A**.** Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$: $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right]^2}{\lambda_k^2}, \tag{15}$$

где λ_k и $v_k(x)$ - собственные значения и собственные функции задачи CA.

Доказательство. В силу (11) и (8), справедливы равенства

$$v_k(x)=\lambda_k\int_0^1 G_A(x,s)s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}v_k(s)ds=-\int_0^1 G_A(x,s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)\right]'ds.$$

Отсюда, учитывая (10) и применяя правило интегрирования по частям, получим

$$v_k(x)=-k_1\int_0^x\left\{\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)\right]'\int_0^s z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\cdot\int_x^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\right\}ds-$$

$$-k_1\int_x^1\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)\right]'\left\{\int_0^x z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\cdot\int_s^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\right\}ds=$$

$$=-k_1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)\int_0^s z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\cdot\int_x^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\Bigg|_{s=0}^{s=x-0}-$$

$$-k_1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)\int_0^x z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\cdot\int_s^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\Bigg|_{s=x+0}^{s=1}+$$

$$+\int_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)(\partial/\partial s)G_A(x,s)ds,$$

откуда, в силу свойства функций $G_A(x,s)$ и $v_k(x)$, следует

$$v_k(x)=\int_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta}v_k'(s)(\partial/\partial s)G_A(x,s)ds.$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}=\int_0^1 s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}\left[\frac{\partial}{\partial s}G_A(x,s)\right]\left\{\frac{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v_k'(s)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}ds. \tag{16}$$

Далее, с помощью правила интегрирования по частям и равенств (8), (9), находим

$$\int_0^1 \frac{s^\alpha (1-s)^\beta v_k'(s) v_l'(s)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} ds = s^\alpha (1-s)^\beta v_k'(s) v_l(s)\Big|_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \frac{\left[s^\alpha (1-s)^\beta v_k'(s)\right]' v_l(s)}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} ds =$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \int_0^1 s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} v_k(s) v_l(s) ds = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \int_0^1 w_k(s) w_l(s) ds = \begin{cases} 1 \text{ при } k = l \,, \\ 0 \text{ при } k \neq l \,. \end{cases} \quad (17)$$

Следовательно, $\left\{ s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} v_k'(s) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$ – ортонормальная система.

Из (16) и (17) следует, что $v_k(x) / \sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции $s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} (\partial / \partial s) G_A(x,s)$ по системе $\left\{ s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} v_k'(s) / \sqrt{\lambda_k} \right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому согласно неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \le \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta \left[(\partial / \partial s) G_A(x,s) \right]^2 ds \,. \quad (18)$$

Принимая во внимание равенство (10), нетрудно убедиться, что

$$\int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta \left[(\partial / \partial s) G_A(x,s) \right]^2 ds = k_1^{-1} \,.$$

Отсюда и из (18) следует, что первый ряд в (15) сходится равномерно.

Теперь, согласно уравнению (11), имеет место равенство

$$\frac{x^\alpha (1-x)^\beta v_k'(x)}{\lambda_k} = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left[\frac{\partial}{\partial x} G_A(x,s) \right] s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} v_k(s) ds \,.$$

Так как $\left\{ s^{(\alpha-\gamma)/2} (1-s)^{(\beta-\delta)/2} v_k(s) \right\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система, то функцию $x^\alpha (1-x)^\beta v_k'(x) / \lambda_k$ можно считать коэффициентом Фурье функции $x^\alpha (1-x)^\beta s^{(\alpha-\gamma)/2} (1-s)^{(\beta-\delta)/2} (\partial / \partial x) G_A(x,s)$ по аргументу s. Тогда, согласно неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left[x^\alpha (1-x)^\beta v_k'(x) \right]^2}{\lambda_k^2} \le \int_0^1 x^{2\alpha} (1-x)^{2\beta} s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} G_A(x,s) \right]^2 ds \,. \quad (19)$$

На основании формулы (10), нетрудно показать, что

$$\int_0^1 x^{2\alpha} (1-x)^{2\beta} s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} \left[G_x'(x,s) \right]^2 ds =\le \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\delta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-\delta+2)} \,. \quad (20)$$

Если учесть (20), то из (19) следует, что второй ряд в (15) сходится равномерно. Лемма 2. A. доказана.

VI. Порядок коэффициентов Фурье

Здесь и далее используем обозначения $g_k=\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}g(x)v_k(x)dx$, $k\in N$, где $g(x)$ – заданная функция, а λ_k и $v_k(x)$, $k\in N$ - собственные значения и собственные функции задачи CA.

Лемма 3. A **.** Если выполнены условия $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)\in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x)\in L_2(0,1)$, $g(0)=g(1)=0$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k g_k^2\le\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[g'(x)\right]^2dx. \tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим следующий неотрицательный функционал:

$$Q(F)=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[F'(x)\right]^2dx=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[g'(x)-\sum_{k=1}^{q-1}g_k v_k'(x)\right]^2dx\ge 0.$$

Перепишем $Q(F)$ в виде

$$Q(F)=Q(g)+\sum_{k=1}^{q-1}g_k^2Q(v_k)-2\sum_{k=1}^{q-1}g_k\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)v_k'(x)dx-$$
$$-2\sum_{\substack{k,l=1\\k\ne l}}^{q-1}g_k g_l\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)v_l'(x)dx. \tag{22}$$

Упростим выражения:

$$Q(v_k)=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[v_k'(x)\right]^2dx,\qquad l=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)v_k'(x)dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям и учитывая равенства $v_k(0)=v_k(1)=0$, $g(0)=g(1)=0$, имеем

$$Q(v_k)=-\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right]'v_k(x)dx,\quad l=-\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right]'h(x)dx.$$

Отсюда, в силу равенства (8) и ортонормированности системы функций $\left\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\gamma)/2}v_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$, получим

$$\left.\begin{aligned}&Q(v_k)=\lambda_k\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\left[v_k(x)\right]^2dx=\lambda_k\int_0^1\left[w_k(x)\right]^2dx=\lambda_k,\\&l=\lambda_k\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}g(x)v_k(x)dx=\lambda_k g_k.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Подставляя (23) в (22) и учитывая равенство (17), имеем

$$Q(F)=Q(g)-\sum_{k=1}^{q-1}\lambda_k g_k^2\ge 0.$$

Так как $\forall\ q\in N$, то справедливо неравенство (21). Лемма 3. A. доказана.

Лемма 4. A **.** Если выполнены условия $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x)\in C[0,1]$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\in C[0,1]$, $x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'\in L_2(0,1)$, $g(0)=g(1)=0$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2 g_k^2 \le \int_0^1 x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left\{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'\right\}^2 dx. \qquad (24)$$

Доказательство. Очевидно, справедливо равенство

$$\int_0^1\left\{x^{\frac{\gamma-\alpha}{2}}(1-x)^{\frac{\delta-\beta}{2}}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'\right\}\left\{x^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\beta-\delta}{2}} v_k(x)\right\}dx=$$

$$=\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]' v_k(x)dx. \qquad (25)$$

Интегрируя по частям дважды, получим

$$\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]' v_k(x)dx = x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)v_k(x)\Big|_0^1 - x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v_k'(x)g(x)\Big|_0^1 +$$

$$+\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} v_k'(x)\right]' g(x)dx.$$

В силу свойств функций $g(x)$, $v_k(x)$ и равенства (8), из последнего следует

$$\int_0^1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]' v_k(x)dx = -\lambda_k\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} g(x)v_k(x)dx = -\lambda_k g_k.$$

Отсюда и из равенства (25) следует, что число $(-\lambda_k g_k)$ – есть коэффициент Фурье функции $x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'$ по ортонормированной системе функций $\left\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (24). Лемма 4. A. доказана.

Лемма 5. A**.** Если выполнены условия $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x)\in C[0,1]$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\in C[0,1]$, $x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'\in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\left\{x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'\right\}'\in L_2(0,1)$, $g(0)=g(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{\gamma-\alpha}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'=0$, $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} g'(x)\right]'=0$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3 g_k^2 \le \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left\{\left[x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)\right]'\right]'\right\}^2 dx.$$

Так как функция $x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)\right]'$ удовлетворяет условиям леммы 3. A и $(-\lambda_k g_k)$ является коэффициентом Фурье этой функции по ортонормированной системе функций $\left\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}v_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$, то согласно неравенству (21), верно утверждение леммы 5. A.

VII. Существование решения задачи A

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x), \tag{26}$$

где $u_k(t)$, $k\in N$ – неизвестные функции, а $v_k(x)$, $k\in N$ - собственные функции задачи CA.

Подставив (26) в уравнение (1) и условие (3), имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[t^a u_k'(t)+bu_k(t)\right]v_k(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right]'$$

$$\lim_{t\to 0+}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x)=\varphi(x).$$

Из этих равенств, учитывая равенства (8) и ортонормированность системы функций $\left\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}v_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ относительно неизвестных функций $u_k(t)$, $k\in N$ получим следующую задачу:

$$t^a u_k'(t)+(b+\lambda_k)u_k(t)=0,\ 0<t<T,\quad u_k(0)=\varphi_k, \tag{27}$$

где $\varphi_k=\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\varphi(x)v_k(x)dx$.

Решение задачи (27) существует, единственно и имеет вид:

$$u_k(t)=\varphi_k e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26), получим формальное решение задачи A в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}v_k(x). \tag{29}$$

Теорема 2. A**.** Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5. A, то сумма ряда (29) определяет решение задачи A.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что ряд (29) и ряды, соответствующие функциям $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)$ сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$, а ряды, соотвествующие $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x$, $t^a u_t(x,t)$, сходятся равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Сначала рассмотрим ряд (29). Так как $\left|e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}\right|\le 1$, то справедливы неравенства

$$\left|u(x,t)\right|=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}v_k(x)\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}v_k(x)\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|v_k(x)\right|. \quad (30)$$

На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|v_k(x)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2.A и 3.A, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Отсюда и из (30) следует, что ряд (29) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Далее,

$$\left|x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}\right|\left|x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right|. \quad (31)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k\varphi_k\right|\left|\frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)}{\lambda_k}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right]^2}{\lambda_k^2}\right]^{1/2}$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2.A и 4.A, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Тогда и ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Следовательно, ряд (31) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим ряд

$$\left|x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v_k'(x)\right]'\right|$$

Отсюда, учитывая уравнение (8), имеем

$$\left|x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x\right|\le\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|\lambda_k v_k(x)\right|. \quad (32)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_k\right|\left|\lambda_k v_k(x)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_k\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\le\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2.A и 5.A, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Тогда равномерно по x на $[0,1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (32) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Аналогично доказывается сходимость ряда $t^a u_t(x,t)$. Теорема 2.A. доказана.

VIII. Устойчивость решения задачи.

Теорема 3. A. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. A. Тогда для решения задачи A справедливы следующие оценки:

$$\|u(x,t)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} \le \|\varphi(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}, \tag{33}$$

$$\max|u(x,t)| \le C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}, \tag{34}$$

где

$$\|f(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} = \left[\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} f^2(x)\,dx\right]^{1/2}, \quad \rho(x) = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta},$$

$$\|f'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[f'(x)\right]^2 dx\right]^{1/2}, \quad r(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta},$$

$$C_1 = \left[\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma^{-1}(2-\alpha-\beta)\right]^{1/2}$$

Доказательство. Так как $\left\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система, то из (29), учитывая $|u_k(t)| = \left|\varphi_k e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}\right| \le |\varphi_k|$, получим следующие неравенства:

$$\|u(x,t)\|^2_{L_{2,\rho}(0,1)} = \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} u^2(x,t)\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x) \sum_{l=1}^{+\infty} u_l(t) v_l(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{+\infty} u_k(t) u_l(t) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v_k(x) v_l(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v_k^2(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \le \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k|^2 \le \|\varphi(x)\|^2_{L_{2,\rho}(0,1)}.$$

Следовательно, оправедливо неравенство (33).

Так как $\left|e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)}\right| \le 1$, то справедливы неравенства

$$|u(x,t)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)} v_k(x)\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\varphi_k e^{-(b+\lambda_k)t^{1-a}/(1-a)} v_k(x)\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k| |v_k(x)| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right| \left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} \le \le C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}$$

$$\le \left[\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[g'(x)\right]^2 dx\right]^{1/2} \le C_1 \|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}.$$

Отсюда, следует неравенство (34). Теорема 4. A. доказана.

Литература:

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики.– Москва: Наука, 1977.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969.
3. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физматлит, 1959.