ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2017
июнь

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

УДК: 517.927

ИНТЕГРАЛ ОПЕРАТОРЛАР ҚАТНАШГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

М.Абдуманнопов

Аннотация

Ушбу мақолада интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун бир чегаравий масала ўрганилган.

Аннотация

В данной статье изучена одна краевая задача с интегральным условием для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего интегральный оператор.

Annotation

In the article a boundary-value problem for the second order constant coefficient differential equation containing integral operators is investigated.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл тенглама.*

Ключевые слова и выражения: *обыкновенное дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, интегральное уравнение.*

Key words and expressions: *ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, integral equation.*

Ушбу кўринишдаги интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^x y(t)\,\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]\,dt=f(x),\ \ x\in(0,1), \qquad (1)$$

бу ерда $\alpha,\beta,\gamma_j,\lambda_j,\delta_j\ (j=\overline{1,n})$ -берилган ҳақиқий сонлар, $\overline{I}_\delta(x)=\Gamma(\delta+1)\left(x/2\right)^{-\delta}I_\delta(x),\ I_\delta(x)$ - мавҳум аргументли Бессел функцияси [1], $\delta_j>(-1/2),\ j=\overline{1,n}.$ $f(x)$ -берилган функция.

(1) тенглама учун $[0,1]$ сегментда қуйидаги масалани қараймиз:

Масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва

$$y(0)=k_1, \qquad y(1)=k_2 \qquad (2)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_1,k_2\in R$- берилган сонлар.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1-лемма. Агар $\beta\le 0,\ 0\le\lambda\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha],\ \gamma_j\le 0,\ j=\overline{1,n}$ бўлса,

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^x y(t)\,\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt=0,\ \ x\in(0,1); \qquad (3)$$

$$y(0)=0, \qquad y(1)=0 \qquad (4)$$

чегаравий масала фақат тривиал ечимга эга бўлади, бу ерда $\lambda=\sup\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,....|\lambda_n|\}$.

Исбот. (3) тенгликни $e^{-2\lambda x}y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $[0,1]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (4) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^1 e^{-2\lambda x}\left[y'(x)\right]^2dx-\int_0^1 e^{-2\lambda x}\left[2\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\right]y^2(x)dx-$$

М.Абдуманнопов *– ФарДУ физика-математика факультети математика ўқитиш методикаси йўналиши 3- курс талабаси.*

$$-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)dx\int_0^x y(t)\,\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt=0\ . \qquad (5)$$

Аниқки, (5) тенгликдаги биринчи интеграл манфий эмас. Кўрсатиш қийин эмаски, агар $\beta\le 0,\ \ 0\le\lambda\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ тенгсизликлар бажарилса, $2\lambda^2+\alpha\lambda+\beta\le 0$ тенгсизлик бажарилиб, (5) тенгликнинг иккинчи ҳади ҳам манфий бўлмайди.

(5) тенгликдаги учинчи ҳадни қарайлик ва

$$l_j=\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)\overline{I}_{\delta_j}\left[\lambda_j(x-t)\right]dt,\ j=\overline{1,n}$$

белгилашларни киритайлик. Бу ерда $\overline{I}_{\delta_j}\left[\lambda_j(x-t)\right]$ функцияни

$$\overline{I}_{\delta_j}\left[\lambda_j(x-t)\right]=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}ch\left[\lambda_j(x-t)\xi\right]d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [1]:

$$l_j=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}d\xi\int_0^1 e^{-2\lambda x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)ch\left[\lambda_j(x-t)\xi\right]dt,$$

бу ерда $\Gamma(z)$ - Эйлернинг гамма- функцияси.

Бу тенгликни $2chx=e^x+e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l_j=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}d\xi\sum_{m=1}^{2}\int_0^1 e^{-2x\mu_m(\xi)}\frac{d}{dx}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx \qquad (6)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\mu_m(\xi)=\lambda+(-1)^m\lambda_j\xi, \qquad \Phi_m(x,\xi)=\int_0^x y(t)e^{(-1)^m\lambda_j\xi t}dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаб, (6) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l_j=\frac{\Gamma(\delta_j+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\delta_j+1/2)}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{\delta_j-1/2}d\xi\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{2}\left\{e^{-2\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(1,\xi)+2\mu_m(\xi)\int_0^1 e^{-2x\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx\right\}.$$

Бу ерда $\mu_m(\xi)\ge 0$ эканлигини эътиборга олиб, $l_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}$ деган хулосага келамиз. Буни ва $\gamma_j\le 0$, $j=\overline{1,n}$ эканлигини ҳисобга олсак, (5) тенгликдаги охирги ҳаднинг ҳам манфий эмаслиги келиб чиқади.

Юқорида исботланганларга асосан, (5) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,$ $x\in[0,1]$ деган хулосага келамиз. Бундан эса (4) шартларга кўра $y(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,1\right]$ эканлиги келиб чиқади. 1-лемма исботланди.

1-теорема. Агар лемма шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб, тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция (0,1) оралиқда (1) тенгламани ва унинг четларида эса (4) шартларни қаноатлантиради. 1- леммага асосан бундай функция айнан нолга тенг, яъни $y(x)\equiv 0,\ \ x\in[0,1]$. Демак, $y_1(x)\equiv y_2(x)\ \ \ x\in[0,1].$ 1-теорема исбот бўлди.

2-теорема. Агар лемма шартлари бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.

Исбот. (1) тенгламани $y''(x)=g(x), \quad x\in(0,1)$ кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$g(x)=f(x)-\alpha y'(x)-\beta y(x)-\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\int_0^x y(t)\,\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(x-t)]dt.$$

Агар $g(x)$ функцияни маълум деб ҳисобласак, бу тенгламанинг ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)g(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлади $[2]$, бу ерда

$$G(x,t)=\begin{cases} x(t-1), x\le t;\\ (x-1)t, x\ge t.\end{cases}$$

(7) тенгликда $y(0),\ \ y(1)$ ва $\mathrm{g}(x)$ ларнинг ўрнига уларнинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва γ_j иштирок этган ҳадларда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)-\int_0^1 M(x,t)y(t)dt=q(x),\ x\in[0,1] \tag{8}$$

кўринишдаги интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$q(x)=k_1(1-x)+k_2x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt,$$

$$M(x,t)=\alpha G_t(x,t)-\beta G(x,t)-G(x,t)\int_t^1\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,\overline{I}_{\delta_j}[\lambda_j(\xi-t)]dt.$$

(8)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб $[3]$, қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1- теоремадан келиб чиқади $[3]$.

(8) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Телеграф тенгламаси учун чегаравий масалалар – Тошкент: университет, 1996.
2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Тошкент: MUMTOZ SO'Z, 2014.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. – Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).