ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2017
июнь

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.956.6

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Каримов

Аннотация

Мақолада ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида учта сингуляр коэффициентга эга бўлган аралаш типдаги уч ўлчовли тенглама учун Франкль масаласининг хос функциялари қурилган.

Аннотация

В статье, методом разделения переменных, построены собственные функции задачи Франкля для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами.

Annotation

In this paper the method of separation of the variables is used to construct the eigenfunctions of the Frankl problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients.

Таянч сўз ва иборалар: *ўзгарувчиларни ажратиш усули, сингуляр коэффициент, Франкль масаласи, хос функциялар.*

Ключевые слова и выражения: *метод разделения переменных, сингулярный коэффициент, задача Франкля, собственные функции.*

Key words and expressions: *method of separation of the variables, singular coefficient, Frankl problem, eigenfunctions.*

Пусть Ω-трехмерная область, ограниченная цилиндрической поверхностью

$$S_0=\left\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ x>0, y>0, 0<z<1\right\},$$

прямоугольниками

$S_1=\left\{(x,y,z): 0<x<1,\ x-y=1,\ 0<z<1\right\}$, $S_2=\left\{(x,y,z): x=0, -1<y<1,\ 0<z<1\right\}$,

и плоскими фигурами: $S_3=D_0\cup I\cup D$, $S_4=\tilde{D}_0\cup\tilde{I}\cup\tilde{D}$, где

$$D_0=\left\{(x,y,z): x^2+y^2<1, x>0, y>0, z=0\right\}, D=\left\{(x,y,z): 0<x<1,\ x-y<1,\ z=0\right\},$$

$$\tilde{D}_0=\left\{(x,y,z): x^2+y^2<1, x>0, y>0, z=1\right\},\ \tilde{D}=\left\{(x,y,z): 0<x<1,\ x-y<1,\ z=1\right\},$$

$$I=\left\{(x,y,z): y=0, z=0, 0<x<1\right\},\ \tilde{I}=\left\{(x,y,z): y=0, z=1, 0<x<1\right\}.$$

Пусть далее $D_1=D\cap\{x+y>0\}$, $D_2=D\cap\{x+y<0\}$, $\Omega_0=D_0\times(0,1)$, $\Omega_1=D_1\times(0,1)$, $\Omega_2=D_2\times(0,1)$, $\bar{\sigma}_0=\bar{S}_0\cap\bar{S}_3$, $\bar{\sigma}_1=\bar{S}_0\cap\bar{S}_4$, $\overline{BO}=\bar{S}_2\cap\bar{D}_0$, $\overline{OC}=\bar{S}_2\cap\bar{D}_2$, $\overline{BC}=\overline{BO}\cup\overline{OC}$, $O(0,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,-1,0)$.

В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn}(x+y)\left[W_{xx}+\operatorname{sgn}(y)\cdot W_{yy}+\frac{2\beta}{x}W_x+\frac{2\beta}{|y|}W_y\right]+W_{zz}+\frac{2\gamma}{z}W_z=0, \tag{1}$$

где $W=W(x,y,z)$ - неизвестная функция, $0<\beta<(1/2)$, $\gamma<(1/2)$.

Задача Ф. Найти функцию $W(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_2$ и краевым условиям

$$|W(x,y,z)|<+\infty,\quad (x,y,z)\in\bar{S}_0; \tag{2}$$

К.Каримов *– ФерГУ, старший научный сотрудник - исследователь кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений.*

$$\lim_{x\to+0} x^{2\beta} W_x(x,y,z)=0, \quad -1<y<1,\ 0\le z\le 1; \tag{3}$$

$$W(0,y,z)+W(0,-y,z)=0, \quad 0\le y\le 1, \quad 0\le z\le 1; \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+0} y^{2\beta} W(x,y,z)=\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta} W(x,y,z), \quad 0<x<1,\ 0\le z\le 1; \tag{5}$$

$$W(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in \overline{S}_3; \tag{6}$$

$$W(x,y,z)=0, \quad (x,y,z)\in \overline{S}_4. \tag{7}$$

Разделив переменные по формуле $W(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий (2)-(7) получим следующие задачи на собственные значения относительно функций $u(x,y)\in C(\overline{S}_3)\cap C^2(D_0\cup D_1\cup D_2)$ и $Z(z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$:

$$u_{xx}+\operatorname{sgn}(y)u_{yy}+\frac{2\beta}{x}u_x+\frac{2\beta}{|y|}u_y-\lambda\operatorname{sgn}(x+y)u=0, \quad (x,y)\in S_3, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to+0} x^{2\beta}u_x(x,y)=0, \quad (x,y)\in BC, \tag{9}$$

$$u(x,y)+u(x,-y)=0, \quad (x,y)\in \overline{OB}, \tag{10}$$

$$|u(x,y)|<+\infty, \quad (x,y)\in\bar{\sigma}_0, \tag{11}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=\lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(x,y),\ x\in I; \tag{12}$$

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)+\lambda Z(z)=0, \quad 0<z<1, \tag{13}$$

$$Z(0)=0, \quad Z(1)=0, \tag{14}$$

где $\lambda-$константа разделения.

Сначала построим собственные функции задачи {(13), (14)}. В уравнении (13), произведя замену $Z(z)=\left(t/\sqrt{\lambda}\right)^{(1/2)-\gamma}y(t)$ и введя обозначение $\gamma_0=(1/2)-\gamma$, где $t=\sqrt{\lambda}z$, получим уравнение Бесселя:

$$t^2y''(t)+ty'(t)+\left(t^2-\gamma_0^2\right)y(t)=0. \tag{15}$$

Принимая во внимание вид общего решения [1] уравнения (15) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (13) в виде

$$Z(z)=c_1z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}z\right)+c_2z^{(1/2)-\gamma}Y_{(1/2)-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}z\right), \ 0<z<1, \tag{16}$$

здесь c_1 и c_2-произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)$-функции Бесселя порядка l первого и второго рода [1] соответственно. Из (16) следует, что решение уравнения (13), удовлетворяющее первому из условий (14), существует при $\gamma<1/2$ и оно определяется равенством

$$Z(z)=c_1 z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}\left(\sqrt{\lambda} z\right). \tag{17}$$

Подставляя (17) ко второму из условий (14), получим условия существования нетривиального решения задачи {(13), (14)}:

$$J_{(1/2)-\gamma}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0. \tag{18}$$

Известно, что при $l>-1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет четное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [1]. Так как $(1/2)-\gamma>0$, то уравнение (18) имеет четное число вещественных корней. Обозначая через $\alpha_n - n$-ый положительный корень уравнения (18), получим те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (т.е. собственные значения задачи) {(13), (14)}: $\lambda_n=\alpha_n^2,\ n\in N$.

Полагая в (17) $\lambda=\lambda_n$ и $c_1=a_n$, где $a_n\neq 0-$произвольная постоянная, получим нетривиальное решение (собственную функцию) задачи {(13), (14)}:

$$Z_n(z)=a_n z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}(\alpha_n z),\ n\in N. \tag{19}$$

Теперь перейдем к исследованию задачи {(8)-(12)}. Предварительно построим решения задачи Коши-Гурса для уравнения (8) в области D_1.

Задача Коши-Гурса. Найти в области D_1 решение $u(x,y)$ уравнения (8), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta} u_y(x,y)=\nu_1(x),\quad 0<x<1; \tag{20}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\overline{OD}, \tag{21}$$

где $\nu_1(x)$ - заданная функция.

Имеет место следующая теорема [2, 3]:

Теорема 1. Если $\nu_1(x)\in C^2(0,1)$ (причем, она может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0,\ x\to 1$), то есть существует единственное решение задачи {(8), (20), (21)} в области D_1, которое определяется формулой

$$u(x,y)=\tilde{\chi}\int_0^{x+y}\nu_1(t)\left(r_0^2\right)^{-\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta}\Xi_2(\beta,1-\beta,1-\beta;r_1,r_2)\,dt, \tag{22}$$

где $\tilde{\chi}=2^{2\beta-1}\Gamma(\beta)/\left[\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)\right]$, $\Gamma(z)$–гамма функция Эйлера [4], $r_0^2=(x-t)^2-y^2$, $r_1=-r_0^2/(4xt)$, $r_2=\lambda r_0^2/4$, а $\Xi_2(a,b,c;x,y)$–гипергеометрическая функция Гумберта [4]:

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_{m+k}\,m!k!}x^m y^k,$$

$(a)_m = a(a+1)(a+2)...(a+m-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$-символ Похгаммера.

В области D_1 рассмотрим функцию $V(x,y) = u(x,y) - u(\xi,\eta)$, где $\xi = -y,\ \eta = -x$. Очевидно, если $(x,y) \in D_1$, то $(\xi,\eta) \in D_2$. Принимая это во внимание, а также свойства функции $u(x,y)$ и равенство $\lim\limits_{y\to -x-0} u(x,y) = \lim\limits_{y\to -x+0} u(x,y),\ 0 \le x \le (1/2)$, нетрудно убедиться, что функция $V(x,y)$ является решением уравнения (8) в области D_1, удовлетворяющим условию $V(x,-x) = 0$. Тогда, согласно формуле (22), оно представимо в виде

$$V(x,y) = \tilde{\chi} \int\limits_0^{x+y} \left[\lim_{z\to -0} (-z)^{2\beta} V_z(t,z) \right] \left(r_0^2\right)^{-\beta} (t/x)^{\beta}\, \Xi_2(\beta, 1-\beta, 1-\beta; r_1, r_2)\, dt.$$

Полагая в этой формуле $y = 0$, учитывая обозначения $\tau_1(x) = u(x,0),\ 0 \le x \le 1$, $\tau_2(y) = u(0,y),\ -1 \le y \le 0$ и $\nu_2(y) = \lim\limits_{x\to +0} x^{2\beta} u_x(x,y)$, $-1 < y < 0$, получим

$$\tau_1(x) - \tau_2(-x) = \tilde{\chi}\Gamma(1-2\beta) \mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda} \left[\nu_1(x) + \nu_2(-x)\right],\ 0 \le x \le 1, \tag{23}$$

где

$$\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[f(x)\right] \equiv \int\limits_0^x f(t)(x-t)^{-2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\beta} \Xi_2\left[\beta, 1-\beta, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, \frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right] dt.$$

Из равенства (23), в силу условий (9) и (10), следуют следующие равенства:

$$\tau_1(x) + \tau_2(x) = \tilde{\chi}\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left[\nu_1(x)\right],\ 0 \le x \le 1. \tag{24}$$

Таким образом, задача {(8)-(12)} эквивалентно сведена к следующей нелокальной эллиптической спектральной задаче в области D_0: найти собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (8), (9), (11) и (24), соответствующие собственным значениям $\lambda_n = \alpha_n^2,\ n \in N$.

Для решения этой задачи в области D_0 введем полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 < \varphi < (\pi/2)$, $0 < r < 1$. Из задачи {(8), (9), (11), (24)}, переходя к координатам (r,φ), а затем, разделяя переменные по формуле $u(x,y) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим две одномерные краевые задачи на собственные значения:

$$r^2 R''(r) + (1+4\beta) r R'(r) - \left[(\alpha_n r)^2 + \mu\right] R(r) = 0,\quad 0 < r < 1, \tag{25}$$

$$R(0) = 0,\quad \left|R(1)\right| < +\infty; \tag{26}$$

$$\Phi''(\varphi) + 4\beta ctg(2\varphi)\Phi'(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0,\ 0 < \varphi < (\pi/2), \tag{27}$$

$$R(x)\left[\Phi(0) + \Phi(\pi/2)\right] = \tilde{\chi}\Gamma(1-2\beta)\mathrm{E}_{0x}^{\beta,\beta,\lambda}\left\{x^{2\beta-1} R(x) \lim_{\varphi\to 0}\left[\Phi'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right]\right\}, \tag{28}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\left[\Phi'(\varphi)(\cos\varphi)^{2\beta}\right]=0, \tag{29}$$

где μ - константа разделения.

Произведя замену $R(r)=(\rho/\alpha_n)^{-2\beta}M(\rho)$, где $\rho=\alpha_n r$, из (25), получим уравнение Бесселя в следующем виде [1]:

$$\rho^2 M''(\rho)+\rho M'(\rho)-\left(\rho^2+\omega^2\right)M(\rho)=0, \tag{30}$$

где $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}$.

Принимая во внимание вид общего решения [1] уравнения (30) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (25) в виде

$$R(r)=c_3 r^{-2\beta}I_\omega(\alpha_n r)+c_4 r^{-2\beta}K_\omega(\alpha_n r), \tag{31}$$

здесь c_3 и c_4 – произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода [1] соответственно.

Из (31) следует, что решение уравнения (25), удовлетворяющее первое из условий (26), существует при $\operatorname{Re}\omega>2\beta$ и оно определяется равенством

$$R(r)=R_n(r)=c_3 r^{-2\beta}I_\omega(\alpha_n r). \tag{32}$$

Подставляя (32) ко второму из условий (26) и полагая $c_3=b_n\left[I_\omega(\alpha_n)\right]^{-1}$, найдем решение задачи {(25), (26)} в виде

$$R_n(r)=q_n r^{-2\beta}\frac{I_\omega(\alpha_n r)}{I_\omega(\alpha_n)},\ n\in N,\ q_n\neq 0. \tag{33}$$

Имеет место следующая лемма [5,6].

Лемма. Если $0<\beta<(1/2)$, $\operatorname{Re}\omega>2\beta$, то справедливо равенство

$$\int_0^x (x-t)^{-2\beta}t^{\beta-1}I_\omega(\alpha_n t)\Xi_2\left(\beta,1-\beta,1-\beta,-\frac{(x-t)^2}{4xt},\frac{\alpha_n^2}{4}(x-t)^2\right)dt=$$
$$=\left[2^{2\beta-1}\Gamma(\beta+\omega/2)\Gamma(1-2\beta)/\Gamma(1-\beta+\omega/2)\right]x^{-\beta}I_\omega(\alpha_n x),\ n\in N. \tag{34}$$

Теперь вернемся к исследованию задачи {(27)-(29)}. Подставляя функцию (32) в равенство (28) и вычисляя полученный интеграл по формуле (34), получим

$$\Phi(0)+\Phi(\pi/2)=\tilde{\chi}2^{2\beta-1}\frac{\Gamma(\beta+\omega/2)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta+\omega/2)}\lim_{\varphi\to 0}\left[\Phi'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right]. \tag{35}$$

В итоге, относительно функции $\Phi(\varphi)$, имеем задачу на собственные значения {(27), (29), (35)}. Решим эту задачу.

Произведя замену $t=\sin^2\varphi$ в уравнении (27), получим гипергеометрическое уравнение

$$t(1-t)\tilde{\Phi}''(t)+\left[(\beta+1/2)-(1+2\beta)t\right]\tilde{\Phi}'(t)+(\mu/4)\tilde{\Phi}(t)=0,$$

где $\tilde{\Phi}(t)=\Phi\left(\arcsin\sqrt{t}\right)$.

Пользуясь общим решением этого уравнения [4], находим общее решение уравнения (27) в виде

$$\Phi(\varphi)=c_9F\left(\beta+\omega/2,\beta-\omega/2,\beta+1/2;\sin^2\varphi\right)+$$
$$+c_{10}(\sin\varphi)^{1-2\beta}F\left[(1+\omega)/2,(1-\omega)/2,(3/2)-\beta;\sin^2\varphi\right], \tag{36}$$

где c_9 и c_{10} – произвольные постоянные.

Из (36), в силу равенства

$$F(a,b;c;0)=1 \text{ и } F(a,b,c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ c-a-b>0,$$

следует, что

$$\Phi(0)=c_9,\ \lim_{\varphi\to0}\left[\Phi'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}\right]=(1-2\beta)c_{10},$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)=c_9\frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+c_{10}\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)},$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\left[\Phi'(\varphi)(\cos\varphi)^{2\beta}\right]=2c_9\frac{\Gamma^2(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}+2c_{10}\frac{\Gamma(c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

где $c=\beta+(1/2),\ a=\beta+(\omega/2),\ b=\beta-(\omega/2)$.

Подставляя эти выражения в граничные условия (29) и (35), имеем однородную систему уравнений относительно c_9 и c_{10}:

$$\begin{cases}\left[1+\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right]c_9+\left[\dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}-\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c)}\right]c_{10}=0,\\ \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}c_9+\dfrac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}c_{10}=0.\end{cases} \tag{37}$$

Так как $\Phi(\varphi)\not\equiv0$, то в формуле (36) $c_9^2+c_{10}^2\neq0$ и, поэтому, система (37) имеет решения, отличные от тривиального. Поэтому основной определитель системы равен нулю. Составляя основной определитель системы (37) и приравнивая её к нулю, а затем, используя формулу [4] $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin(x\pi),\quad x\notin Z$, имеем тригонометрическое уравнение относительно ω:

$$\cos(\omega\pi/2)+\cos(\beta\pi)+\sin\left[(\beta-\omega/2)\pi\right]=0.$$

Последнее уравнение имеет только вещественные корни. Выписывая его решения и принимая во внимание условие $\omega>2\beta$, имеем

$$\omega_k=4k-2+2\beta,\ k\in N. \tag{38}$$

Следовательно, $\mu_k = \omega_k^2 - 4\beta^2$, $k \in N$, где ω_k −число, определяемое равенством (38), являются собственными значениями задачи {(27)–(29)}.

Из системы (37) при $\omega = \omega_k$, $k \in N$ следует, что

$$c_{10} = -\frac{\Gamma\left[\left(1-\omega_k\right)/2\right]\Gamma\left[\left(1+\omega_k\right)/2\right]\Gamma\left(\beta+1/2\right)}{\Gamma\left(\beta+\omega_k/2\right)\Gamma\left(\beta-\omega_k/2\right)\Gamma\left(3/2-\beta\right)} c_9. \tag{39}$$

Полагая в (36) $\omega = \omega_k$, $c_9 = d_k$, $k \in N$, где $d_k \neq 0$-произвольные постоянные, и учитывая (39), получим собственные функции задачи {(27)–(29)}, соответствующие собственным значениям μ_k:

$$\Phi_k\left(\varphi\right) = d_k\left\{F\left(\beta+\omega_k/2,\ \beta-\omega_k/2, \beta+1/2; \sin^2\varphi\right) - \right.$$
$$\left. -\gamma_k\left(\sin\varphi\right)^{1-2\beta} F\left[\left(1+\omega_k\right)/2, \left(1-\omega_k\right)/2, 3/2-\beta; \sin^2\varphi\right]\right\},\ k \in N, \tag{40}$$

где $\gamma_k = \left\{\Gamma\left[\left(1-\omega_k\right)/2\right]\Gamma\left[\left(1+\omega_k\right)/2\right]\Gamma\left(\beta+1/2\right)\right\} / \left[\Gamma\left(\beta+\omega_k/2\right)\Gamma\left(\beta-\omega_k/2\right)\Gamma\left(3/2-\beta\right)\right]$.

Теперь, подставляя (19), (33), (40) в равенство $W\left(x,y,z\right) = R\left(r\right)\Phi\left(\varphi\right)Z\left(z\right)$, получим нетривиальные в области Ω_0 решения задачи Ф:

$$W_{nk}\left(x,y,z\right) = c_{nk} z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}\left(\alpha_n z\right) r^{-2\beta} \frac{I_{\omega_k}\left(\alpha_n r\right)}{I_{\omega_k}\left(\alpha_n\right)} \times$$
$$\times\left\{F\left(\beta+\frac{\omega_k}{2},\ \beta-\frac{\omega_k}{2}, \beta+\frac{1}{2}; \sin^2\varphi\right) - \right.$$
$$\left. -\gamma_k\left(\sin\varphi\right)^{1-2\beta} F\left[\left(1+\omega_k\right)/2, \left(1-\omega_k\right)/2, 3/2-\beta; \sin^2\varphi\right]\right\},\ n,k \in N,$$

где $c_{nk} \neq 0$-произвольные постоянные.

Литература:

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.
2. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1968, Т.4, №8. –С.1465-1483.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. -688 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. –296 с.
5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. – Ташкент. «Mumtoz so'z», 2010. -354 с.
6. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал.– Ташкент, 2006. -№3. –С.68-78.

(Рецензент: А.Уринов, доктор физико-математических наук, профессор).