

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

3-2017
ИЮНЬ

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

К.КАРИМОВ

Учта сингуляр коэффициентга эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун Франкль масаласининг хос функцияларини қуриш 5

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

К.ОНАРҚУЛОВ, Ғ.РАҲМАТОВ

Мева-сабзавотлар учун инфрақизил қуритиш қурилмаси 12

Ш.ЯКУБОВА, Т.АЗИМОВ, З.ХУСАНОВ, О.ТЎЛАНОВ

Астрономик координаталар тизимлари 14

БИОЛОГИЯ, КИМЁ

Ш.ХАМИДОВ, А.МАТКАРИМОВА, Ш.ТУРСУНОВА

Доривор тирноқгул (*Calendula officinalis* L.) нинг ўсиши ва ривожланиш хусусиятлари 18

У.БОЛТАБОВ

Енгил саноатдаги ишлаб чиқариш жараёнида мавжуд бўлган омилларнинг одам организмга таъсирини ўрганиш 21

Р.МАТЪЯКУБОВ, Д.САЛМОНОВА, И.ТУРДИБОВ, Ш.АБДУРАЗЗАКОВА

Карбамидформальдегид – (КФО) ва фенолформальдегид олигомерлари (ФФО)ни фурфурил спирти билан сополимерларининг олиниши ва хоссаларини тадқиқ қилиш 24

Х.ТОШЕВ, А.ЕШИМБЕТОВ, А.ХАЙТБАЕВ, Ш.ТУРҒУНБОВ, Ж.БЕКНАЗАРОВ

Госсипол айрим Шифф асосларининг геометрик ва энергетик характеристикаларини ярим эмпирик усулда ўрганиш 27

Ш.ЮЛДАШЕВА, Ш.И.ХАСАНОВА

Полиз шираси миқдорий зичлигини бошқариб туришда энтомофагларнинг ўрни 32

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

А.ҲАМИДОВ

Ўзбекистонда ландшафт тадқиқотлари ва тармоқ районлаштириш муаммолари 35

Ю.АҲМАДАЛИЕВ, О.АБДУҒАНИЕВ

Фарғона водийсида суғориладиган ерларнинг тупроқ-экологик ҳолатидаги ўзгаришларни баҳолаш 39

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

З.ТАДЖИБАЕВ

Ўзбекистонда иқтисодий таълим: кеча, бугун ва эртага 42

ФАЛСАҒА, СИЁСАТ, ТАРИХ

А.ҚАМБАРОВ

Илмий қадриятлар – мамлакатни барқарор ривожлантириш омили 47

Қ.СУЛАЙМОНОВ

Ўрта синф – бозор иқтисодиётининг етакчи кучи 50

Д.НОРМАТОВА

Ахлоқий меросда тарихий-маънавий қадриятлар масаласи 54

Г.МАДРАХИМОВА

Мустақиллик йилларида оналар ва болалар саломатлигига эътиборнинг кучайтирилиши 58

АДАБИЁТШУНОСЛИК

О.ДАДАЖОНОВ

“Ёш Вертернинг изтироблари” асарида инсон кечинмаларининг бадиий талқини 62

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Каримов

Аннотация

Мақолада ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида учта сингуляр коэффициентга эга бўлган аралаш типдаги уч ўлчовли тенглама учун Франкль масаласининг хос функциялари қурилган.

Аннотация

В статье, методом разделения переменных, построены собственные функции задачи Франкля для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами.

Annotation

In this paper the method of separation of the variables is used to construct the eigenfunctions of the Frankl problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients.

Таянч сўз ва иборалар: ўзгарувчиларни ажратиш усули, сингуляр коэффициент, Франкль масаласи, хос функциялар.

Ключевые слова и выражения: метод разделения переменных, сингулярный коэффициент, задача Франкля, собственные функции.

Key words and expressions: method of separation of the variables, singular coefficient, Frankl problem, eigenfunctions.

Пусть Ω -трехмерная область, ограниченная цилиндрической поверхностью

$$S_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0, 0 < z < 1\},$$

прямоугольниками

$$S_1 = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, x - y = 1, 0 < z < 1\}, S_2 = \{(x, y, z) : x = 0, -1 < y < 1, 0 < z < 1\},$$

и плоскими фигурами: $S_3 = D_0 \cup I \cup D$, $S_4 = \tilde{D}_0 \cup \tilde{I} \cup \tilde{D}$, где

$$D_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z = 0\}, D = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, x - y < 1, z = 0\},$$

$$\tilde{D}_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z = 1\}, \tilde{D} = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, x - y < 1, z = 1\},$$

$$I = \{(x, y, z) : y = 0, z = 0, 0 < x < 1\}, \tilde{I} = \{(x, y, z) : y = 0, z = 1, 0 < x < 1\}.$$

Пусть далее $D_1 = D \cap \{x + y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x + y < 0\}$, $\Omega_0 = D_0 \times (0, 1)$, $\Omega_1 = D_1 \times (0, 1)$, $\Omega_2 = D_2 \times (0, 1)$, $\bar{\sigma}_0 = \bar{S}_0 \cap \bar{S}_3$, $\bar{\sigma}_1 = \bar{S}_0 \cap \bar{S}_4$, $\overline{BO} = \bar{S}_2 \cap \bar{D}_0$, $\overline{OC} = \bar{S}_2 \cap \bar{D}_2$, $\overline{BC} = \overline{BO} \cup \overline{OC}$, $O(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, -1, 0)$.

В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn}(x + y) \left[W_{xx} + \operatorname{sgn}(y) \cdot W_{yy} + \frac{2\beta}{x} W_x + \frac{2\beta}{|y|} W_y \right] + W_{zz} + \frac{2\gamma}{z} W_z = 0, \quad (1)$$

где $W = W(x, y, z)$ - неизвестная функция, $0 < \beta < (1/2)$, $\gamma < (1/2)$.

Задача Ф. Найти функцию $W(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ и краевым условиям

$$|W(x, y, z)| < +\infty, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_0; \quad (2)$$

К.Каримов – ФерГУ, старший научный сотрудник - исследователь кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{2\beta} W_x(x, y, z) = 0, \quad -1 < y < 1, 0 \leq z \leq 1; \quad (3)$$

$$W(0, y, z) + W(0, -y, z) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1; \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} W(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} W(x, y, z), \quad 0 < x < 1, 0 \leq z \leq 1; \quad (5)$$

$$W(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_3; \quad (6)$$

$$W(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \bar{S}_4. \quad (7)$$

Разделив переменные по формуле $W(x, y, z) = u(x, y)Z(z)$, из уравнения (1) и краевых условий (2)-(7) получим следующие задачи на собственные значения относительно функций $u(x, y) \in C(\bar{S}_3) \cap C^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2)$ и $Z(z) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$:

$$u_{xx} + \operatorname{sgn}(y)u_{yy} + \frac{2\beta}{x}u_x + \frac{2\beta}{|y|}u_y - \lambda \operatorname{sgn}(x+y)u = 0, \quad (x, y) \in S_3, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{2\beta} u_x(x, y) = 0, \quad (x, y) \in BC, \quad (9)$$

$$u(x, y) + u(x, -y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{OB}, \quad (10)$$

$$|u(x, y)| < +\infty, \quad (x, y) \in \bar{\sigma}_0, \quad (11)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y), \quad x \in I; \quad (12)$$

$$Z''(z) + \frac{2\gamma}{z}Z'(z) + \lambda Z(z) = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (13)$$

$$Z(0) = 0, \quad Z(1) = 0, \quad (14)$$

где λ – константа разделения.

Сначала построим собственные функции задачи {(13), (14)}. В уравнении (13), произведя замену $Z(z) = (t/\sqrt{\lambda})^{(1/2)-\gamma} y(t)$ и введя обозначение $\gamma_0 = (1/2) - \gamma$, где $t = \sqrt{\lambda}z$, получим уравнение Бесселя:

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - \gamma_0^2) y(t) = 0. \quad (15)$$

Принимая во внимание вид общего решения [1] уравнения (15) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (13) в виде

$$Z(z) = c_1 z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}(\sqrt{\lambda}z) + c_2 z^{(1/2)-\gamma} Y_{(1/2)-\gamma}(\sqrt{\lambda}z), \quad 0 < z < 1, \quad (16)$$

здесь c_1 и c_2 – произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)$ – функции Бесселя порядка l первого и второго рода [1] соответственно. Из (16) следует, что решение уравнения (13), удовлетворяющее первому из условий (14), существует при $\gamma < 1/2$ и оно определяется равенством

$$Z(z) = c_1 z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}(\sqrt{\lambda}z). \quad (17)$$

Подставляя (17) ко второму из условий (14), получим условия существования нетривиального решения задачи {(13), (14)}:

$$J_{(1/2)-\gamma}(\sqrt{\lambda}) = 0. \quad (18)$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет четное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [1]. Так как $(1/2) - \gamma > 0$, то уравнение (18) имеет четное число вещественных корней. Обозначая через α_n – n -ый положительный корень уравнения (18), получим те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (т.е. собственные значения задачи) {(13), (14)}: $\lambda_n = \alpha_n^2$, $n \in N$.

Полагая в (17) $\lambda = \lambda_n$ и $c_1 = a_n$, где $a_n \neq 0$ – произвольная постоянная, получим нетривиальное решение (собственную функцию) задачи {(13), (14)}:

$$Z_n(z) = a_n z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}(\alpha_n z), \quad n \in N. \quad (19)$$

Теперь перейдем к исследованию задачи {(8)-(12)}. Предварительно построим решения задачи Коши-Гурса для уравнения (8) в области D_1 .

Задача Коши-Гурса. Найти в области D_1 решение $u(x, y)$ уравнения (8), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y) = v_1(x), \quad 0 < x < 1; \quad (20)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{OD}, \quad (21)$$

где $v_1(x)$ – заданная функция.

Имеет место следующая теорема [2, 3]:

Теорема 1. Если $v_1(x) \in C^2(0, 1)$ (причем, она может иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$), то есть существует единственное решение задачи {(8), (20), (21)} в области D_1 , которое определяется формулой

$$u(x, y) = \tilde{\chi} \int_0^{x+y} v_1(t) (r_0^2)^{-\beta} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta \Xi_2(\beta, 1-\beta, 1-\beta; r_1, r_2) dt, \quad (22)$$

где $\tilde{\chi} = 2^{2\beta-1} \Gamma(\beta) / [\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$, $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера [4], $r_0^2 = (x-t)^2 - y^2$, $r_1 = -r_0^2 / (4xt)$, $r_2 = \lambda r_0^2 / 4$, а $\Xi_2(a, b, c; x, y)$ – гипергеометрическая функция Гумберта [4]:

$$\Xi_2(a, b, c; x, y) = \sum_{m, k=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_{m+k} m! k!} x^m y^k,$$

$(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$ -символ Похгаммера.

В области D_1 рассмотрим функцию $V(x, y) = u(x, y) - u(\xi, \eta)$, где $\xi = -y, \eta = -x$. Очевидно, если $(x, y) \in D_1$, то $(\xi, \eta) \in D_2$. Принимая это во внимание, а также свойства функции $u(x, y)$ и равенство $\lim_{y \rightarrow -x-0} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow -x+0} u(x, y)$, $0 \leq x \leq (1/2)$, нетрудно убедиться, что функция $V(x, y)$ является решением уравнения (8) в области D_1 , удовлетворяющим условию $V(x, -x) = 0$. Тогда, согласно формуле (22), оно представимо в виде

$$V(x, y) = \tilde{\chi} \int_0^{x+y} \left[\lim_{z \rightarrow -0} (-z)^{2\beta} V_z(t, z) \right] (r_0^2)^{-\beta} (t/x)^\beta \Xi_2(\beta, 1-\beta, 1-\beta; r_1, r_2) dt.$$

Полагая в этой формуле $y = 0$, учитывая обозначения $\tau_1(x) = u(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$, $\tau_2(y) = u(0, y)$, $-1 \leq y \leq 0$ и $\nu_2(y) = \lim_{x \rightarrow +0} x^{2\beta} u_x(x, y)$, $-1 < y < 0$, получим

$$\tau_1(x) - \tau_2(-x) = \tilde{\chi} \Gamma(1-2\beta) E_{0x}^{\beta, \beta, \lambda} [\nu_1(x) + \nu_2(-x)], \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (23)$$

где

$$\Gamma(1-2\beta) E_{0x}^{\beta, \beta, \lambda} [f(x)] \equiv \int_0^x f(t) (x-t)^{-2\beta} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta \Xi_2\left[\beta, 1-\beta, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, \frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right] dt.$$

Из равенства (23), в силу условий (9) и (10), следуют следующие равенства:

$$\tau_1(x) + \tau_2(x) = \tilde{\chi} \Gamma(1-2\beta) E_{0x}^{\beta, \beta, \lambda} [\nu_1(x)], \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (24)$$

Таким образом, задача {(8)-(12)} эквивалентно сведена к следующей нелокальной эллиптической спектральной задаче в области D_0 : найти собственные функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям (8), (9), (11) и (24), соответствующие собственным значениям $\lambda_n = \alpha_n^2$, $n \in N$.

Для решения этой задачи в области D_0 введем полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 < \varphi < (\pi/2)$, $0 < r < 1$. Из задачи {(8), (9), (11), (24)}, переходя к координатам (r, φ) , а затем, разделяя переменные по формуле $u(x, y) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим две одномерные краевые задачи на собственные значения:

$$r^2 R''(r) + (1+4\beta)rR'(r) - \left[(\alpha_n r)^2 + \mu \right] R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (25)$$

$$R(0) = 0, \quad |R(1)| < +\infty; \quad (26)$$

$$\Phi''(\varphi) + 4\beta ctg(2\varphi)\Phi'(\varphi) + \mu\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < (\pi/2), \quad (27)$$

$$R(x) [\Phi(0) + \Phi(\pi/2)] = \tilde{\chi} \Gamma(1-2\beta) E_{0x}^{\beta, \beta, \lambda} \left\{ x^{2\beta-1} R(x) \lim_{\varphi \rightarrow 0} [\Phi'(\varphi) (\sin \varphi)^{2\beta}] \right\}, \quad (28)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} \left[\Phi'(\varphi) (\cos \varphi)^{2\beta} \right] = 0, \quad (29)$$

где μ - константа разделения.

Произведя замену $R(r) = (\rho / \alpha_n)^{-2\beta} M(\rho)$, где $\rho = \alpha_n r$, из (25), получим уравнение Бесселя в следующем виде [1]:

$$\rho^2 M''(\rho) + \rho M'(\rho) - (\rho^2 + \omega^2) M(\rho) = 0, \quad (30)$$

где $\omega = \sqrt{4\beta^2 + \mu}$.

Принимая во внимание вид общего решения [1] уравнения (30) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (25) в виде

$$R(r) = c_3 r^{-2\beta} I_\omega(\alpha_n r) + c_4 r^{-2\beta} K_\omega(\alpha_n r), \quad (31)$$

здесь c_3 и c_4 - произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)$ - модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода [1] соответственно.

Из (31) следует, что решение уравнения (25), удовлетворяющее первое из условий (26), существует при $\operatorname{Re} \omega > 2\beta$ и оно определяется равенством

$$R(r) = R_n(r) = c_3 r^{-2\beta} I_\omega(\alpha_n r). \quad (32)$$

Подставляя (32) ко второму из условий (26) и полагая $c_3 = b_n [I_\omega(\alpha_n)]^{-1}$, найдем решение задачи {(25), (26)} в виде

$$R_n(r) = q_n r^{-2\beta} \frac{I_\omega(\alpha_n r)}{I_\omega(\alpha_n)}, \quad n \in N, \quad q_n \neq 0. \quad (33)$$

Имеет место следующая лемма [5,6].

Лемма. Если $0 < \beta < (1/2)$, $\operatorname{Re} \omega > 2\beta$, то справедливо равенство

$$\int_0^x (x-t)^{-2\beta} t^{\beta-1} I_\omega(\alpha_n t) \Xi_2 \left(\beta, 1-\beta, 1-\beta, -\frac{(x-t)^2}{4xt}, \frac{\alpha_n^2}{4} (x-t)^2 \right) dt = \\ = \left[2^{2\beta-1} \Gamma(\beta + \omega/2) \Gamma(1-2\beta) / \Gamma(1-\beta + \omega/2) \right] x^{-\beta} I_\omega(\alpha_n x), \quad n \in N. \quad (34)$$

Теперь вернемся к исследованию задачи {(27)-(29)}. Подставляя функцию (32) в равенство (28) и вычисляя полученный интеграл по формуле (34), получим

$$\Phi(0) + \Phi(\pi/2) = \tilde{\chi} 2^{2\beta-1} \frac{\Gamma(\beta + \omega/2) \Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta + \omega/2)} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left[\Phi'(\varphi) (\sin \varphi)^{2\beta} \right]. \quad (35)$$

В итоге, относительно функции $\Phi(\varphi)$, имеем задачу на собственные значения {(27), (29), (35)}. Решим эту задачу.

Произведя замену $t = \sin^2 \varphi$ в уравнении (27), получим гипергеометрическое уравнение

$$t(1-t) \tilde{\Phi}''(t) + [(\beta + 1/2) - (1 + 2\beta)t] \tilde{\Phi}'(t) + (\mu/4) \tilde{\Phi}(t) = 0,$$

где $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(\arcsin \sqrt{t})$.

Пользуясь общим решением этого уравнения [4], находим общее решение уравнения (27) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & c_9 F(\beta + \omega/2, \beta - \omega/2, \beta + 1/2; \sin^2 \varphi) + \\ & + c_{10} (\sin \varphi)^{1-2\beta} F[(1+\omega)/2, (1-\omega)/2, (3/2) - \beta; \sin^2 \varphi], \end{aligned} \quad (36)$$

где c_9 и c_{10} – произвольные постоянные.

Из (36), в силу равенства

$$F(a, b; c; 0) = 1 \text{ и } F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c-a-b > 0,$$

следует, что

$$\begin{aligned} \Phi(0) = & c_9, \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} [\Phi'(\varphi)(\sin \varphi)^{2\beta}] = (1-2\beta)c_{10}, \\ \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = & c_9 \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + c_{10} \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2} [\Phi'(\varphi)(\cos \varphi)^{2\beta}] = & 2c_9 \frac{\Gamma^2(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + 2c_{10} \frac{\Gamma(c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned}$$

где $c = \beta + (1/2)$, $a = \beta + (\omega/2)$, $b = \beta - (\omega/2)$.

Подставляя эти выражения в граничные условия (29) и (35), имеем однородную систему уравнений относительно c_9 и c_{10} :

$$\begin{cases} \left[1 + \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right] c_9 + \left[\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} - \frac{\Gamma(a)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(c)} \right] c_{10} = 0, \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} c_9 + \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} c_{10} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Так как $\Phi(\varphi) \not\equiv 0$, то в формуле (36) $c_9^2 + c_{10}^2 \neq 0$ и, поэтому, система (37) имеет решения, отличные от тривиального. Поэтому основной определитель системы равен нулю. Составляя основной определитель системы (37) и приравнивая её к нулю, а затем, используя формулу [4] $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi / \sin(x\pi)$, $x \notin Z$, имеем тригонометрическое уравнение относительно ω :

$$\cos(\omega\pi/2) + \cos(\beta\pi) + \sin[(\beta - \omega/2)\pi] = 0.$$

Последнее уравнение имеет только вещественные корни. Выписывая его решения и принимая во внимание условие $\omega > 2\beta$, имеем

$$\omega_k = 4k - 2 + 2\beta, \quad k \in N. \quad (38)$$

Следовательно, $\mu_k = \omega_k^2 - 4\beta^2$, $k \in N$, где ω_k – число, определяемое равенством (38), являются собственными значениями задачи {(27)–(29)}.

Из системы (37) при $\omega = \omega_k$, $k \in N$ следует, что

$$c_{10} = -\frac{\Gamma[(1-\omega_k)/2]\Gamma[(1+\omega_k)/2]\Gamma(\beta+1/2)}{\Gamma(\beta+\omega_k/2)\Gamma(\beta-\omega_k/2)\Gamma(3/2-\beta)}c_9. \quad (39)$$

Полагая в (36) $\omega = \omega_k$, $c_9 = d_k$, $k \in N$, где $d_k \neq 0$ – произвольные постоянные, и учитывая (39), получим собственные функции задачи {(27)–(29)}, соответствующие собственным значениям μ_k :

$$\Phi_k(\varphi) = d_k \left\{ F\left(\beta + \omega_k/2, \beta - \omega_k/2, \beta + 1/2; \sin^2 \varphi\right) - \gamma_k (\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\omega_k)/2, (1-\omega_k)/2, 3/2 - \beta; \sin^2 \varphi\right] \right\}, k \in N, \quad (40)$$

где $\gamma_k = \left\{ \Gamma[(1-\omega_k)/2]\Gamma[(1+\omega_k)/2]\Gamma(\beta+1/2) \right\} / \left[\Gamma(\beta+\omega_k/2)\Gamma(\beta-\omega_k/2)\Gamma(3/2-\beta) \right]$.

Теперь, подставляя (19), (33), (40) в равенство $W(x, y, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$, получим нетривиальные в области Ω_0 решения задачи Ф:

$$W_{nk}(x, y, z) = c_{nk} z^{(1/2)-\gamma} J_{(1/2)-\gamma}(\alpha_n z) r^{-2\beta} \frac{I_{\omega_k}(\alpha_n r)}{I_{\omega_k}(\alpha_n)} \times \\ \times \left\{ F\left(\beta + \frac{\omega_k}{2}, \beta - \frac{\omega_k}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \varphi\right) - \gamma_k (\sin \varphi)^{1-2\beta} F\left[(1+\omega_k)/2, (1-\omega_k)/2, 3/2 - \beta; \sin^2 \varphi\right] \right\}, n, k \in N,$$

где $c_{nk} \neq 0$ – произвольные постоянные.

Литература:

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. –798 с.
2. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1968, Т.4, №8. –С.1465-1483.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. –688 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. –296 с.
5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. – Ташкент. «Mumtoz so'z», 2010. –354 с.
6. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2006. –№3. –С.68-78.

(Рецензент: А.Уринов, доктор физико-математических наук, профессор).