ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU.
ILMIY
XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

6-2021

НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оригинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими: - 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 50 нусха
Буюртма №
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

МУНДАРИЖА

УДК:51+517.564

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ МОДЕЛ ТЕНГЛАМА УЧУН НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

NON-LOCAL PROBLEMS FOR PARABOLO-HYPERBOLIC TYPE MODEL EQUATION

Исмоилов Мухторжон Хамидович, Кўпайсинова Захрохон

Исмоилов Мухторжон Хамидович – *Фарғона давлат университети, математик анализ ва дифференциал тенгламалар кафедраси ўқитувчиси.*

Кўпайсинова Захрохон –*Фарғона давлат университети, магистрант.*

Аннотация

Мақолада параболо-гиперболик типдаги тенглама учун Бицадзе-Самарский типидаги нолокал шартли масалалар қўйилган ва ўрганилган.

Аннотация

В статье поставлена и изучена нелокальная задача с условием типа Бицадзе-Самарского для модельного параболо-гиперболического уравнения.

Annotation

In the paper a non-local problem with Bitsadze-Samarskii type condition has benn formulated and investigated for a model parabolic-hyperbolic type equation.

***Таянч сўз ва иборалар**: Фурье тенгламаси, Даламбер тенгламаси, параболо-гиперболик тенглама, силжишли шарт, Трикоми масаласи.*

***Ключевые слова и выражения**: уравнение Фурье, уравнение Даламбера, параболо-гиперболическое уравнение, условие со смещением, задача Трикоми.*

***Key words and expressions:** Fourier's equation, D'Alamber's equation, paraboli-hyperbolic equation, shift condition, Tricomi's problem.*

Ω билан xOt текислигининг $x+t=0$, $x-t=l$, $x=0$, $x=l$, $t=T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган чекли соҳасини белгилайлик, бу ерда $l=const>0$, $T=const>0$. Яна қуйидаги белгилашларни киритайлик: $\Omega_1=[\Omega\cap(t>0)]\cup AE$, $\Omega_2=\Omega\cap(t<0)$, $AE=\{(x,T):0<x<l\}$, $OA=\{(0,t):0<t<T\}$, $OB=\{(x,0):0<x<l\}$, $BE=\{(l,t):0<t<T\}$, $OM=\{(x,t):t=-x,0<x<(l/2)\}$, $BM=\{(x,t):t=x-l,(l/2<x<l)\}$.

Ω соҳада

$$u_{xx}-\frac{1}{2}(1-\operatorname{sgn}t)u_{tt}-\frac{1}{2}(1+sgn\,t)u_t=0 \qquad (1)$$

тенгламани қарайлик. Бу тенглама Ω_1 соҳада Фурье тенгламаси $u_{xx}-u_t=0$ кўринишни олиб, параболик типга тегишли бўлади, Ω_2 соҳада эса тор тебраниш тенгламаси, яъни Даламбер тенгламаси $u_{xx}-u_{tt}=0$ кўринишни олиб, гиперболик типга тегишли бўлади. Шунинг учун (1) тенглама Ω соҳада аралаш тенглама, яъни параболо-гиперболик тенглама бўлиб, *OB* кесма унинг тип ўзгариш чизиғидир. Бу тенгламанинг характеристикалари Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда мос равишда $t=C_0$ ва $x\pm t=C_1$ чизиқлардан иборат бўлиб,тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи, яъни *OB* кесма характеристика ҳам бўлади.

МАТЕМАТИКА

2-масала. Шундай $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C_{x,t}^{2,1}(\Omega_1)\cap C^2(\Omega_2)$ функция топилсинки, у Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда (1) тенгламани, *OB* тип ўзгариш чизиғида

$$\lim_{t\to+0}u_t(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t) \qquad (2)$$

улаш шартини

$$u_x(0,t)=\alpha(t)u(x_0,t)+\varphi_1(t),\qquad u_x(l,t)=\beta(t)u(x_1,t)+\varphi_2(t),\ \ 0<t\le T; \qquad (25)$$

$$a(x)\frac{d}{dx}u(\frac{x}{2},-\frac{x}{2})+b(x)\frac{d}{dx}u(\frac{x+l}{2},\frac{x-l}{2})+c(x)u(x,0)=p(x)\quad 0\le x\le l \qquad (26)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – берилган узлуксиз функциялар $a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)\ne 0$, $x\in[0,l]$, $x_0\ne x_1$, $x_0,x_1\in(0,l)$-берилган ҳақиқий сонлар.

(2) силжишли шарт деб аталиб, у номаълум $u(x,t)$ функциянинг $\overline{OB}$, $\overline{OM}$ ва $\overline{BM}$ кесмалардаги қийматларини боғламоқда.

Қуйидаги шартлар берилган деб ҳисоблаб, масаланинг бир қийматли ечилишини тадқиқ қиламиз:

$$a(x),\ b(x),\ c(x),\ p(x)\in C^2[0,l], \qquad (27)$$

$$a(l)=0,\qquad b(0)=0, \qquad (28)$$

$$a^2(x)+b^2(x)+c^2(x)\ne 0,\qquad\qquad x\in[0,l], \qquad (29)$$

$$\left(a(x)/P_1\left(x\right)\right)'\le 0,\ \left(b(x)/P_1(x)\right)'\ge 0\ ,\ x\in[0,l];\ P_1(x)=a(x)+b(x)+2c(x) \qquad (30)$$

$$a(x)-b(x)\ne 0. \qquad (31)$$

$u(x,t)$ қўйилган масаланинг ечими бўлсин. (6) белгилашларни ва фаразларни қабул қилсак, $u(x,t)$ функция (7) кўринишда ёзилади. Натижада (8) тенгликлар ўринли бўлади. Бу тенгликларни эътиборга олсак, (26) шартдан

$$P_1\left(x\right)\tau(x)=2p(x)-a(x)\tau(0)-b(x)\tau(l)+a(x)\int_0^x\nu(\xi)d\xi+b(x)\int_0^l\nu(\xi)d\xi;\qquad x\in[0,l]$$

тенглик келиб чиқади. (30) шартни эътиборга олиб, бу тенгликдан $P_1\left(x\right)$ ифодага эга бўламиз. Сўнгра

$$p_1(x)=p(x)/P_1(x),\quad a_1(x)=a(x)/P_1(x),\quad b_1(x)=b(x)/P_1(x),$$

белгилашни киритсак, $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ номаълум функциялар орасидаги Ω_2 соҳадан олинган *асосий муносабатга* эга бўламиз:

$$\tau(x)=2p_1(x)-a_1(x)\tau(0)-b_1(x)\tau(l)+a_1(x)\int_0^x\nu(\xi)d\xi+b_1(x)\int_0^l\nu(\xi)d\xi;\ \ x\in[0,l], \qquad (32)$$

Бу тенгликда $x=0$ ва $x=l$ деб, (28) шартларни ҳисобга олсак, $\tau(0)$ ва $\tau(l)$ номаълум сонлар бир қийматли топилади:

$$\tau(0)=p(0)/\left[a(0)+c(0)\right],\qquad\qquad \tau(l)=p(l)/\left[b(l)+c(l)\right]. \qquad (33)$$

Энди (1) тенгламада t ни нолга интилтирсак, (6) белгилашларга асосан

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\quad x\in(0,l) \qquad (34)$$

тенглик келиб чиқади.

Натижада, номаълум $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларга нисбатан {(32), (33), (34)} масалага эга бўламиз.

{(32), (33), (34)} масаланинг бир қийматли ечилишини текширайлик. Дастлаб бу масала ечимининг ягоналигини текширамиз. Фараз қилайлик, {(32), (33), (34)} масала $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ ва $\tau_2(x)$ ва $\nu_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$, $\nu(x)=\nu_1(x)-\nu_2(x)$ функциялар (34) ва

$$\tau(0)=0, \quad \tau(l)=l, \tag{35}$$

$$\tau(x)=a_1(x)\int_0^x \nu(\xi)d\xi+b_1(x)\int_0^l \nu(\xi)d\xi, \quad x\in[0,l] \tag{36}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(34), (35), (36) тенгликлар ёрдамида

$$J=\int_0^l \tau(x)\nu(x)dx$$

интегралнинг ишорасини текширайлик.

(34) тенгликдан $\nu(x)$ функцияни топиб ва J интегралга қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган интегрални бўлакласак ва (35) тенгликларни инобатга олсак,

$$J=\int_0^l \tau(x)\nu(x)dx=\int_0^l [\tau'(x)]^2dx\le 0 \tag{37}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Энди $\tau(x)$ функциянинг (36) ифодасини J интегралга қўямиз ва ҳосил бўлган ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^l \left\{a_1(x)\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \nu(\xi)d\xi\right]^2-b_1(x)\frac{d}{dx}\left[\int_x^l \nu(\xi)d\xi\right]^2\right\}dx.$$

Бу интегрални бўлаклаб, сўнгра (28) шартларни ҳисобга олсак,

$$J=\frac{1}{2}\int_0^l \left\{b_1'(x)\left[\int_x^l \nu(\xi)d\xi\right]^2-a_1'(x)\left[\int_0^x \nu(\xi)d\xi\right]^2\right\}dx$$

тенглик келиб чиқади. (17) шарт бажарилганда $a_1'(x)\le 0$, $b_1'(x)\ge 0$, $x\in[0,l]$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Буларни инобатга олсак, охирги тенгликдан $J\ge 0$ эканлигини топамиз. Бундан ва (37) тенгсизликдан келиб чиқадики, $J=0$. У ҳолда J нинг (37) кўринишига кўра $\tau'(x)\equiv 0$, яъни $\tau(x)=const$, $x\in[0,l]$. Унда (35) тенгликларга асосан $\tau(x)\equiv 0$, $x\in[0,l]$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\tau_1(x)\equiv\tau_2(x)$, $\nu_1(x)\equiv\nu_2(x)$, $x\in[0,l]$, яъни, агар {(32), (33), (34)} масала ечимга эга бўлса, у ягонадир.

Изоҳ. Бу тасдиқни исботлашда $[\tau'(x)]^2dx$ интегрални мавжуд ва чекли, яъни $\tau'(x)\in L_2[0,1]$ деб ҳисобладик. Буни инобатга олсак, (33) тенгликдан $\nu(x)\in L_2[0,1]$ бўлиши келиб чиқади. Демак, ечимнинг ягоналиги ҳақидаги юқоридаги тасдиқ $\tau'(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар $L_2[0,1]$ синфга тегишли бўлганда ўринли бўлади.

энди {(32), (33), (34)} масала ечимининг мавжудлигини текширамиз. Шу мақсадда (34) тенгликда x ни z билан алмаштириб, ҳосил бўлган тенгликни z бўйича $[0,x]$ оралиқда икки марта интеграллаймиз:

$$\tau(x)=\int_0^x (x-z)\nu(z)dz+C_1x+C_0$$

Бу функцияни (33) шартларга қўйиб, C_0 ва C_1 сонларни топамиз:

$$C_0=\tau(0), \qquad C_1=\frac{1}{l}\left[\tau(l)-\tau(0)-\int_0^l (l-z)\nu(z)dz\right].$$

Буларни эътиборга олсак, $\tau(x)$ функция қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\tau(x)=\int_0^x (x-z)\nu(z)dz-\frac{x}{l}\int_0^l (l-z)\nu(z)dz+\tau(0)+\frac{x}{l}\big[\tau(l)-\tau(0)\big], \quad x\in[0,l].$$

$\tau(x)$ функциянинг бу ифодасини (32) тенгликка қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликни бир марта дифференциаллаб, $\nu(x)$ номаълум функцияга нисбатан қуйидаги кўринишдаги

$$\nu(x)+\int_0^l \nu(z)K_1(x,z)dz=f_1(x) \quad x\in(0,l) \tag{38}$$

иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда

$$f_1(x)=\{a_1'(x)\tau(0)+b_1'(x)\tau(l)-2p_1'(x)+[\tau(l)-\tau(0)]l^{-1}\}[a_1(x)-b_1(x)]^{-1},$$

$$K_1(x,z)=\begin{cases}[a_1(x)-b_1(x)]^{-1}[a_1'(x)-zl^{-1}], & x\ge z;\\ [a_1(x)-b_1(x)]^{-1}[b_1'(x)+1-zl^{-1}], & x\le z.\end{cases}$$

(38) интеграл тенглама {(32), (33), (34)} масалага эквивалент бўлиб, унга мос бир жинсли масалага мос келади. Охирги масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (38) га мос бир жинсли интеграл тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга бўлади. У ҳолда Фредгольм альтернативасига асосан бир жинслимас (38) интеграл тенглама ягона ечимга эга бўлади.

(27) шартлар ва $f_1(x)$, $K_1(x,z)$ функцияларнинг тузилишига асосан (38) интеграл тенгламанинг ечими $C^1[0,l]$ синфга тегишли бўлади.

(38) интеграл тенгламадан топилган $\nu(x)\in C^1[0,l]$ функцияни (32) тенгликка қўйиб, $\tau(x)\in C^2[0,l]$ функцияни топамиз.

{(32), (33), (34)} масаладан топилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларни (7) формулага қўйиб, 2-масаланинг ечимини Ω_2 соҳада топамиз. Масаланинг ечими Ω_1 соҳада $u_{xx}-u_t=0$ тенгламага (25), $u(x,0)=\tau(0)$ шартлар билан қўйилган масаланинг ечими сифатида аниқланади. Бу масаланинг ечимини иккинчи чегаравий масаланинг ечимини берувчи ушбу кўринишда қидирамиз:

$$u(x,t)=\int_0^l \tau(\xi)G_2(x,t;\xi,0)d\xi-\int_0^t u_x(0,\eta)G_2(x,t;0,\eta)d\eta+\int_0^t u_x(l,\eta)G_2(x,t;l,\eta)d\eta \tag{39}$$

$$G_2(x,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{\exp[-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}]+\exp[-\frac{(x+\xi-2nl)^2}{4(t-\eta)}]\}.$$

(25) шартларни ҳисобга олиб, (40) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$u(x,t)=\int_0^l \tau(\xi)G_2(x,t;\xi,0)d\xi-\int_0^t[\alpha(\eta)u(x_0,\eta)+\varphi_1(\eta)]G_2(x,t;0,\eta)d\eta+\int_0^t[\beta(\eta)u(x_1,\eta)+\varphi_2(\eta)]G_2(x,t;l,\eta)d\eta \quad (40)$$

Бу формулада $x=x_0$ ва $x=x_1$ деб, $u(x_0,t)$ ва $u(x_1,t)$ формулаларга нисбатан қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} u(x_0,t)-\int_0^t u(x_0,\eta)[\alpha(\eta)G_2(x_0,t;0,\eta)d\eta-\int_0^t u(x_1,\eta)[\beta(y)G_2(x_0,y;-l,\eta)d\eta=m_3(t),\\ u(x_1,t)+\int_0^t u(x_0,\eta)[\alpha(\eta)G_2(x_1,y;0,\eta)d\eta-\int_0^t u(x_1,\eta)[\beta(y)G_2(x_1,y;-l,\eta)d\eta=m_4(t)\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

$$m_3(t)=\int_0^1 \tau(\xi)[G_2(x_0,t;0,\eta)d\eta-\int_0^t \varphi_1(\eta)G_2(x_0,t;0,\eta)d\eta+\int_0^t \varphi_2(\eta)G_2(x_0,t;l,\eta)d\eta,$$

$$m_4(t)=\int_0^1 \tau(\xi)[G_2(x_1,t;0,\eta)d\eta-\int_0^t \varphi_1(\eta)G_2(x_1,t;0,\eta)d\eta+\int_0^l \varphi_2(\eta)G_2(x_1,t;-l,\eta)d\eta.$$

(41) –иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалар системаси бўлиб, унинг ядролари ва ўнг томонлари узлуксиз функциялардан иборат. Шунинг учун бу системанинг ечими мавжуд ва ягона.

(41) системадан топилган $u(x_0,t)$ ва $u(x_1,t)$ функцияларни (40) формулага қўйиб, ўрганилаётган 2- масаланинг Ω_1 соҳадаги ечимига эга бўламиз.

Шу билан 2-масала тадқиқоти якунланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.// − Т.: ”Наврўз”, 2016.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор)