ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2017
АПРЕЛЬ

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.927

ИНТЕГРАЛ ОПЕРАТОР ҚАТНАШГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

А.Қ.Ўринов, М.М.Абдуманнопов

Аннотация

Ушбу мақолада интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ўрганилган.

Аннотация

В данной статье изучена задача с интегральным условием для простого дифференциального уравнения второго порядка с интегральным оператором.

Annotation

This article studied the problem with an integral condition for second-order ordinary differential equation with integral operator.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама,интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл шартли масала, интеграл тенглама.*

Ключевые слова и выражения: *простое дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, задача с интегральным условием, интегральное уравнение.*

Key words and expressions: *ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, problem with integral condition, integral equation.*

Фараз қилайлик, берилган $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ва $\gamma(x)$ функциялар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)\int_0^x y(t)J_0[\lambda(x-t)]dt+\gamma(x)y(x)=0,\ 0<x<1 \tag{1}$$

интегро - дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда λ - берилган ҳақиқий сон, $J_0(x)$ - биринчи тур Бессел функцияси [1].

Масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0)=k_1, \qquad \int_0^1 y(x)dx=k_2, \tag{2}$$

бу ерда k_1 ва k_2 - берилган ҳақиқий сонлар.

Қўйилган масала бир қийматли ечилишини текширамиз. Аввал қуйидаги леммаларни исботлаймиз.

1- лемма. Агар $y(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\int_0^1 y(x)dx=0 \tag{3}$$

тенгликни қаноатлантирса, $[0,1]$ сегментда шундай ξ сон топиладики, $y(\xi)=0$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Агар $y(x)\geq 0$ ёки $y(x)\leq 0$ деб фараз қилсак, (3) тенглик бажарилмайди. Шунинг учун (3) дан келиб чиқадики, ёки $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$, ёки $y(x)$ функция $(0,1)$ оралиқда ишорасини ўзгартиради. Биринчи ҳолда теорема исбот бўлади, бунда ξ сифатида $(0,1)$ оралиқдаги ихтиёрий сонни олиш мумкин. Иккинчи ҳолда эса, $y(x)$ функциянинг $(0,1)$ да узлуксиз бўлганлиги учун шундай $\xi\in(0,1)$ топиладики, $y(\xi)=0$ тенглик ўринли бўлади.

А.Ўринов – ФарДУ, физика математика фанлари доктори, профессор,
М.Абдуманнопов – ФарДУ физика-математика факультети 3- курс талабаси.

1- лемма исботланди.

2-лемма. Агар $\beta(x_0) \le 0,\quad \beta'(x) \ge 0,\quad (1/2)\alpha'(x) - \gamma(x) \ge 0,\quad x \in [0, x_0]$ тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда

$$y''(x) + \alpha(x) y'(x) + \beta(x) \int_0^x y(t) J_0[\lambda(x-t)]dt + \gamma(x) y(x) = 0,\ x \in (0, x_0)\ ; \tag{4}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(x_0) = 0 \tag{5}$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. (4) тенгликни $y(x)$ га кўпайтириб, сўнгра x бўйича $[0, x_0]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0} [y'(x)]^2 dx + \int_0^{x_0} \left[\frac{1}{2}\alpha'(x) - \gamma(x) \right] y^2(x) dx -$$

$$-\int_0^{x_0} y(x)\beta(x) dx \int_0^{x_0} y(t) J_0[\lambda(x-t)]dt = 0\ . \tag{6}$$

Энди (6) даги учинчи интегрални қараймиз. Уни ℓ билан белгилаб, $J_0[\lambda(x-t)]$ функцияни

$$J_0[\lambda(x-t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{-1/2} \cos[\lambda(x-t)\eta] d\eta$$

тенглик билан алмаштирамиз [1]:

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{-1/2} \left\{ \int_0^{x_0} \beta(x) y(x) dx \int_0^x y(t) \cos[\lambda(x-t)\eta] \right\} d\eta.$$

Бу ифодадаги $\cos[\lambda(x-t)\eta]$ функцияни

$$\cos[\lambda(x-t)\eta] = \cos(\lambda x\eta)\cos(\lambda t\eta) + \sin(\lambda x\eta)\sin(\lambda t\eta)$$

тенглик орқали алмаштирсак, ℓ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\ell = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{-1/2} \left\{ \int_0^{x_0} \beta(x) \frac{d}{dx} \left[\left(\int_0^x y(t)\cos(\lambda t\eta) dt \right)^2 + \left(\int_0^x y(t)\sin(\lambda t\eta) dt \right)^2 \right] \right\} dx.$$

Бу ердаги x бўйича интегрални бўлакласак,

$$\ell = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} (1-\eta^2)^{-1/2} \left\{ \beta(x_0) \left[\left(\int_0^{x_0} y(t)\cos(\lambda t\eta)\, dt \right)^2 + \left(\int_0^{x_0} y(t)\sin(\lambda t\eta)\, dt \right)^2 \right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^{x_0} \beta'(x) \left[\left(\int_0^x y(t)\cos(\lambda t\eta)\, dt \right)^2 + \left(\int_0^x y(t)\sin(\lambda t\eta)\, dt \right)^2 \right] dx \right\} d\eta$$

тенгликка эга бўламиз.

$\lambda \in R$ ва $\beta(x_0) \le 0,\ \beta'(x) \ge 0,\ \forall x \in [0, x_0]$ тенгсизликларга асосан охирги тенгликдан $\ell \le 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу ва $(1/2)\alpha'(x) - \gamma(x) \ge 0,\ \forall x \in [0, x_0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (6) тенгликдан $y'(x) \equiv 0$, яъни $y(x) = const,\ \ x \in [0, x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. Бундан эса (5) шартларга асосан $y(x) \equiv 0,\ x \in [0, x_0]$ эканлиги келиб чиқади. 2- лемма исботланди.

1- теорема. Агар $\beta(x)\le 0,\quad \beta'(x)\ge 0,\quad (1/2)\alpha'(x)-\gamma(x)\ge 0,\quad x\in\left[0,1\right]$ тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция (1) тенгламани ва

$$y(0)=0,\qquad \int_0^1 y(x)dx=0 \tag{7}$$

шартларни қаноатлантиради. (7) тенгликларнинг иккинчиси ва 1-леммага асосан, шундай $x_0\in(0,1)$ мавжудки, $y(x_0)=0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(4),(5)} масалани қарасак, 2- леммага асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгликни эътиборга олсак, {(1),(7)} масаладан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)\int_0^x y(t)J_0[\lambda(x-t)]dt+\gamma(x)y(x)=0,\quad x\in(x_0,1); \tag{8}$$

$$y(x_0)=0,\ \int_{x_0}^1 y(x)dx=0 \tag{9}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(8),(9)} тенгликларга юқоридаги усул билан 1- ва 2- леммаларни қўлласак, шундай $x_1\in(x_0,1)$ мавжудки, $y(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (8) ва (9) тенгликлардан

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)\int_{x_1}^1 y(t)J_0[\lambda(x-t)]dt+\gamma(x)y(x)=0,\quad x\in(x_1,1);$$

$$y(x_1)=0,\ \int_{x_1}^1 y(x)\,dx=0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 1- ва 2- леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x)\equiv 0$ бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x)\in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(1)\equiv 0,$ деган хулосага эга бўламиз. Демак, $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,1]$. Унда $y_1(x)\equiv y_2(x),\ x\in[0,1].$ 1- теорема исботланди.

2-теорема. Агар 1- теорема шартлари ва $\alpha(x)\in C^1[0,1]$ шарт бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x)=f(x),\ x\in(0,1) \tag{10}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f(x)=-\alpha(x)y'(x)-\gamma(x)y(x)-\beta(x)\int_0^x y(t)J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (10) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)f(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{11}$$

тенглик ўринли бўлади [2], бу ерда

$$G(x,t)=\begin{cases} x(t-1), x\le t; \\ (x-1)t, x\ge t. \end{cases}$$

(11) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ва $f(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\beta(t)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 M(x,t)y(t)dt\,,\ x\in[0,1] \tag{12}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t)=[G(x,t)\alpha(t)]'_t-G(x,t)\left[\gamma(t)+\int_t^1 \beta(\xi)\overline{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt\right].$$

(12) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (12) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt=F(x),\ x\in[0,1] \tag{13}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$F(x)=k_1(1-2x)+2k_2x,\ M_1(x,t)=M(x,t)-2x\int_0^1 M(z,t)dz.$$

(13)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [3], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1- теоремадан келиб чиқади [3].

(13) интеграл тенгламанинг ечими $M_1(x,t)$ ядро резольвентаси $R(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F(x)+\int_0^1 R(x,t)F(t)dt\,,\ \ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2- теорема исботланди.

Адабиётлар:

1. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона: “Фарғона”, 2012.
2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. – Т.: MUMTOZ SO’Z, 2014.
3. Салоҳиддинов М.С. Интеграл тенгламалар. – Т.: Yangiyul polygraph service, 2007.