ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

5-2021

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК.ФЕРГУ

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оргинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими: - 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 50 нусха
Буюртма №
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК: 517.9+519.49

БИР НОМАЪЛУМЛИ МОДУЛЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШНИНГ БИР УСУЛИ ҲАҚИДА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ МОДУЛЕМ

ON THE ONE METHOD FOR SOLVING EQUATIONS WITH UNKNOWN MODULE

Ғойипов Алижон[1]

[1]**Ғойипов Алижон** – мустақил тадқиқотчи

Аннотация

Мақолада бир номаълумли модулли тенгламаларнинг сон ўқида ечиш усуллари ва методик имкониятлари кўриб чиқилган. Шунингдек, унда модулли тенгламаларни сон ўқида ечишга қаратилган формула ва кўрсатмалар тавсия этилади.

Аннотация

В статье рассматриваются методы и методологические возможности решения неизвестных модульных уравнений на числовой оси. В ней также рекомендуются формулы и инструкции для решения модульных уравнений на числовой оси.

Annotation

The article discusses methods and methodological possibilities for solving unknown modular equations on the number axis. He also recommends formulas and instructions for solving modular equations on the number axis.

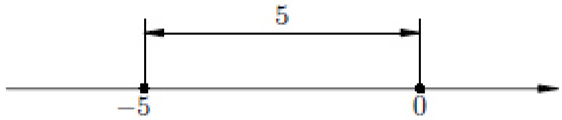
Таянч сўз ва иборалар: *сон ўқи, модулли тенгламалар, симметрия маркази, кесмалар, оралиқ.*

Ключевые слова и выражения: *числовая ось, модульные уравнения, центр симметрии, отрезки, интервал.*

Key words and expressions: *number axis, modular equations, center of symmetry, line segments, interval.*

Олтинчи синф математика дарсларида ўқувчилар соннинг модули тушунчаси билан танишадилар. Ўқув адабиётларда соннинг модули тушунчаси қуйидагича таърифланади: x соннинг модули деб координата бошидан x нуқтагача бўлган масофага (бирлик кесмаларда) айтилади. x соннинг модули $|x|$ каби белгиланади. Ушбу таъриф модулнинг геометрик маъносини очиб беради [1]. Модулнинг геометрик маъноси нолдан берилган сонгача бўлган масофани англатишини эслатиб ўтамиз. Ҳақиқий соннинг модули – бу, унинг абсолют қиймати бўлиб, соннинг модули манфий бўлмаган қийматдир: $|x| \geq 0$.

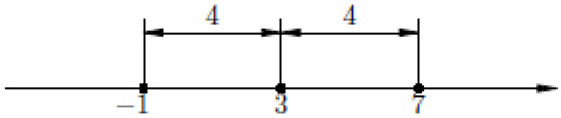
Масалан, $|-5| = 5$ га тенг бўлиб, -5 дан 0 нуқтагача масофа 5 га тенг (1-расм).



1-расм

Соннинг модули таърифидан фойдаланиб модулли тенгламаларни сон ўқида осон ечиш мумкин.

Масалан, $|x-3| = 4$ тенгламани олайлик. Бу тенгламани шундай тушуниш мумкин: x нуқтадан 3 гача масофа 4 га тенг, яъни 3 дан 4 бирлик чапда ва ўнг жойлашган нуқталарни топиш талаб этилади. Умумий ҳолда a нуқтадан b бирлик масофада жойлашган нуқталар қуйидаги формуладан топилади: $a-b$ ва $a+b$. График усулдан фойдаланиб, тенгламанинг иккита ечими борлигини аниқлаш мумкин: $3-4=-1$, $3+4=7$. (2-расм)



2-расм

Соннинг модули таърифидан фойдаланиб, модулли тенгсизликларнинг ҳам ечимлари тўпламини топиш мумкин. Масалан, $\left|10-x\right|\geq 7$ тенгсизликни олайлик [2]. Тенгсизликнинг ечимлари тўплами 10 дан x гача бўлган масофа еттидан кичик бўлмаган нуқталардан иборат: $10-7=3$, $10+7=17$. (3-расм).

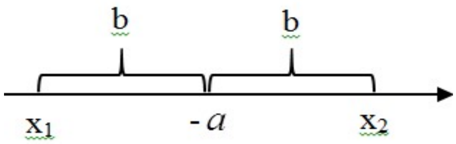
Жавоб: $\left(-\infty;3\right]\cup\left[17;+\infty\right)$.

3-расм

Соннинг модули таърифидан фойдаланиб, модулли тенгламаларни ечиш бўйича қуйидаги методик тавсияларни келтирамиз. Ушбу методик тавсиялар модулли тенгламаларни сон ўқида ечиш усулини шакллантиради.

1. $\left|x+a\right|=b$, $(b\geq 0)$ **кўринишидаги тенгламаларни ечиш.**

$\left|x+a\right|=b$ тенглама илдизлари $-a$ нуқтадан b бирлик масофада жойлашган нуқталар ҳисобланади. Сон ўқидан фойдаланиб, тенгламанинг иккита ечими борлигини аниқлаш мумкин: $x_1=-a-b$ ва $x_2=-a+b$ (4-расм).



4-расм

1-мисол. $\left|x+3\right|=5$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Сон ўқида -3 дан 5 бирлик масофадан жойлашган нуқталар қуйидагилар: $-3-5=-8$ ва $-3+5=2$. Жавоб: $-8;\ 2$

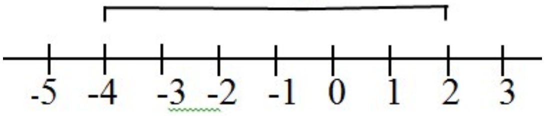
2. $\left|x+a\right|+\left|x+b\right|=c,\ (c\geq 0)$ **кўринишидаги тенгламаларни ечиш.**

Ҳар бир модулли ифодаларнинг ноллари топилади: $x=-a$, $x=-b$. Айтайлик $-a<-b$ бўлсин. Бунда қуйидаги шартларга асосланиб, тенгламанинг ечимларини топамиз.

а) Агар $\left|-a-(-b)\right|>c$ бўлса, тенглама ечимга эга эмас. Бунда сон ўқида узунлиги c га тенг кесма $\left|-a+b\right|$ узунликдаги кесманинг ичига тушиб қолади.

2-мисол. $\left|x+5\right|+\left|x-3\right|=6$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Тенглама ечимга эга эмас, чунки -5 дан 3 гача масофа 6 дан катта: $\left|3-(-5)\right|=8>6$. (5-расм)



5-расм

б) Агар $\left|-a+b\right|=c$ бўлса, у ҳолда c кесма $\left|-a+b\right|$ кесма билан устма-уст тушади ва $\left[-a;-b\right]$ кесмадаги барча ҳақиқий сонлар тенгламанинг ечими бўлади ҳамда $-a$ ва $-b$ сонлар ҳам ечимга киради.

3-мисол. $\left|x+5\right|+\left|x-3\right|=8$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Тенглама $[-5;3]$ кесмада чексиз кўп ечимга эга. $x_1=-5$ ва $x_2=3$ сонлар ҳам тенглама илдизи бўлади. Илдизлар ҳақидаги мулоҳазани қуйидагича аниқлаштириб оламиз: $(-\infty;-5]$ оралиқда тенгламанинг илдизи 5 га тенг, $(-5;3]$ оралиқда чексиз кўп ечимга эга ва 3 ҳам ечимга киради, $(3;+\infty)$ оралиқда ечимга эга эмас. Хулоса қилиш мумкинки, берилган тенглама $[-5;3]$ кесмада чексиз кўп ечимга эга ва $x_1=-5$, $x_2=3$ сонлар ҳам тенглама илдизи бўлади.

с) Агар $\left|-a-(-b)\right|<c$ бўлса, тенглама қуйидагича иккита ечимга эга:

$$x_1=-a-\frac{c-\left|-a+b\right|}{2},\quad x_1=-b+\frac{c-\left|-a+b\right|}{2}$$

Ушбу формуланинг исботи ушбу мулоҳазалардан келиб чиқади.

1) Сон ўқида $\left|-a+b\right|$ узунликдаги кесма ҳосил қилинади.

2) $\left|-a+b\right|$ кесма билан узунлик c га тенг кесма устма-уст қўйилади, бунда иккала кесманинг ҳам симметрия марказлари бир нуқтада бўлиши лозим.

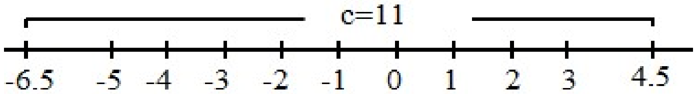
3) Натижада c узунликдаги кесманинг учлари сон ўқида $-a$ нуқтадан чапда ва $-b$ нуқтадан эса ўнг жойлашади. $-a$ нуқтадан чапда жойлашган нуқтани топиш учун c узунликдаги кесма узунлигидан $\left|-a+b\right|$ узунликдаги кесма узунлиги айирмаси ярмини айириш лозим. $-b$ нуқтадан ўнгда жойлашган нуқтани топиш учун эса c узунликдаги кесма узунлигидан $\left|-a+b\right|$ узунликдаги кесма узунлиги айирмаси ярмини қўшиш талаб этилади.

Изоҳ. Тенглама илдизларини бошқа усулда ҳам топиш мумкин. $\left|-a+b\right|$ узунликдаги кесманинг симметрия маркази x_0 нуқтада бўлсин. Бу нуқтадан $\frac{c}{2}$ бирлик узоқликда жойлашган нуқталар топилади. Натижада тенгламанинг илдизлари $x_1=x_0+\frac{c}{2}$ ва $x_2=x_0-\frac{c}{2}$ эканлиги келиб чиқади.

Бундай усул билан тенглама илдизларини топиш айниқса ясаш ва чизиш ҳамда индуктив мулоҳазаларнинг татбиқ этилиши натижасида келиб чиқади. Буни қуйидаги мисолда аниқлаштириб оламиз.

4-мисол. $\left|x+5\right|+\left|x-3\right|=11$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Сон ўқида -5дан 3 нуқтагача бўлган масофа $\left|3-(-5)\right|=8$ га тенг. Боши -5 нуқтада ва охири 3 нуқта бўлган кесманинг симметрия маркази -1 нуқтада жойлашган. Узунлиги 8 га тенг кесманинг устига узунлиги 11 га тенг кесмани устма-уст қўямиз, бунда симметрия марказлари умумий нуқтада, яъни -1 да ётади. Маълумки, узунлиги 8 га тенг кесма сон ўқида узунлиги 11 га тенг кесманинг ҳар иккала учидан бир хил узунликдаги кесмаларни ажратади. Бундай мулоҳаза берилган нуқтадан икки томонда жойлашган ва бир хил узунлашган нуқталар тенг узунликдаги кесмаларни ажратишидан келиб чиқади. Сон ўқида биринчи нуқта -5 нуқтадан чапда, иккинчи нуқта эса 3 дан ўнгда жойлашган. -5 нуқтадан чапда жойлашган нуқтани топиш учун 11 узунликдаги кесма узунлигидан $\left|3-(-5)\right|=8$ узунликдаги кесма узунлиги айирмаси ярмини айириш лозим. 3 нуқтадан ўнгда жойлашган нуқтани топиш учун эса 11 узунликдаги кесма узунлигидан $\left|3-(-5)\right|=8$ узунликдаги кесма узунлиги айирмаси ярмини қўшиш талаб этилади. (6-расм)



6-расм

Юқоридаги формуладан фойдаланамиз:

$$x_1=-5-\frac{11-\left|5+3\right|}{2}=-6,5\,; \qquad x_1=3+\frac{11-\left|5+3\right|}{2}=4,5$$

Тенгламанинг илдизларини қуйидагича ҳам топиш мумкин. $\left|3-(-5)\right|=8$ га тенг узунликдаги кесманинг симметрия маркази $x_0=\dfrac{-5+3}{2}=-1$ нуқтада жойлашган. Ундан сон ўқида $\dfrac{11}{2}=5,5$ бирлик масофада жойлашган нуқталарни топамиз. $x_1=-1-5,5=-6,5$ ва $x_2=-1+5,5=4,5$.

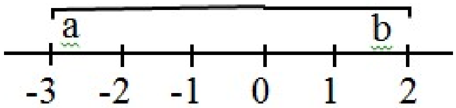
3. $\left|x+a\right|-\left|x+b\right|=c,\ (c\geq 0)$ **кўринишидаги тенгламаларни ечиш.**

а) Агар сон ўқида $\left|-a+b\right|\geq\left|c\right|$ бўлса, тенглама ечимга эга;

б) $\left|-a+b\right|<\left|c\right|$ бўлса, тенглама ечимга эга бўлмайди.

5-мисол. $\left|x+3\right|-\left|x-2\right|=7$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Модулли ифодаларнинг нолларини топамиз: $x_1=-3$, $x_2=2$. Уларни сон ўқида тасвирлаймиз. Бу ерда $c=7$, $a=-3$, $b=2$.(7-расм)



7-расм

$\left|-a+b\right|<\left|c\right|$ дан $\left|-3-2\right|<\left|7\right|$ бўлгани учун тенглама ечимга эга эмас. Ҳақиқатда ҳам тенглама $\left(-\infty;-3\right]$ оралиқда ечимга эга эмас, $\left(-3;2\right]$ оралиқда $x=3$ ечимга эга, лекин бу илдиз берилган оралиқда ётмаганлиги учун чет илдиз сифатида қаралади, $\left(2;+\infty\right)$ оралиқда ечим йўқ. Демак, тенглама ечимга эга эмас.

4. $\left|a_1x+b_1\right|+\left|a_2x+b_2\right|+\ldots+\left|a_nx+b_n\right|=c,\ (c\geq 0)$ **кўринишидаги тенгламаларни ечиш.**

$\left|a_1x+b_1\right|+\left|a_2x+b_2\right|+\ldots+\left|a_nx+b_n\right|=c,\ (c\geq 0)$ кўринишдаги тенгламаларни ечишда қуйидагилар ҳисобга олинади:

1) Тенгламада қатнашган модулли ифодаларни нолга айлантирадиган нуқталар топилади ва бу нуқталарда тенглама қандай қийматни қабул қилиши аниқланади.

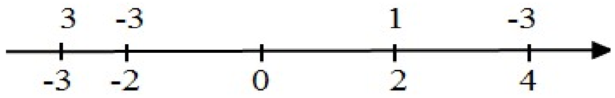
2) Модулли ифодаларни нолга айлантирадиган нуқталар сон ўқида қаралса, бундай ихтиёрий иккита нуқта орасида ётган нуқталарда тенгламанинг қийматлари бир хил миқдорда ўзгариб боради. Яъни, иккита нуқта орасида ётган нуқталар тенгламага қўйилса, қийматлар арифметик прогрессияни ташкил этади.

3) Агар тенгламада модуль белгиси инобатга олинмаганда ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар йиғиндиси қандай бўлса, сон ўқида жойлашган четки нуқталарда ҳам тенгламанинг қийматлари шу бирликда ўзгариб боради.

4) Юқоридагилар асосида тенгламанинг илдизлари сон ўқида топилади.

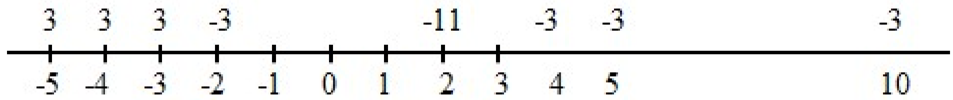
6-мисол. $|2x+4|+|3x-6|-|2x-8|-|9+3x|=19$ тенгламани ечинг

Ечиш: Тенгламада қатнашган модулли ифодаларни нолга айлантирадиган нуқталарни топамиз: $-2, 2, 4, -3$. Бу нуқталарни тенгламага қўйиб, қандай қийматлар қабул қилиниши аниқланади. Сон ўқида $-2, 2, 4, -3$ нуқталарни ва уларга мос тенгламанинг қабул қилган қийматларини тасвирлаймиз. Бунда $-2, 2, 4, -3$ нуқталарни сон ўқининг қуйига ва унга мос қийматларни эса юқори қисмига жойлаштирамиз. (8-расм)



8-расм

Модуль белгиси инобатга олинмаганда тенгламада ўзгарувчиларнинг коэффициентлари йиғиндиси $2+3-2-3=0$ га тенг. Шунинг учун сон ўқининг четки нуқталарида тенглама қандай қийматни қабул қилса, ундан кейинги нуқталарда ҳам шундай қийматларни қабул қилади, масалан, -3 да тенглама 3 га тенг қийматни қабул қилса, ундан кейинги $-4; -5; -6...$ нуқталарда ҳам 3 га тенг қийматни қабул қилади. Демак, $(-\infty;-3]$ оралиқда тенглама 3 га, $[4;+\infty)$ оралиқда эса -3 га тенг қийматларни қабул қилади. Сон ўқидаги қийматлардан аёнки, тенглама ечимга эга эмас. (9-расм)



9-расм

7-мисол. $|2x+4|+|3x-6|-|2x-8|-|9+3x|=-7$ тенгламани ечинг.

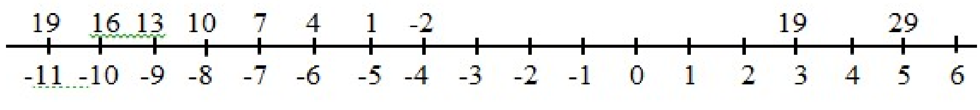
Ечиш: Тенглама сон ўқидаги -2 ва 2 орасида жойлашган барча нуқталарда айирмаси -2 га тенг арифметик прогрессияни ташкил этади. Масалан, $x=-1$ да тенглама -5 ва $x=0$ да -7 қийматни қабул қилади. Худди шундай $x=3$ да ҳам -7 га тенг қийматни қабул қилади. Демак, тенгламанинг илдизлари $x_1=0$ ва $x_2=3$.

8-мисол. $|3-x|+|12+3x|-|x-5|=17$ тенгламани ечинг.

Ечиш: Тенгламада модулли ифодаларни нолга айлантирадиган нуқталарни топамиз: $3; -4; 5$. Сон ўқида четки нуқталардан кейин қандай ўзгаришини аниқлаймиз, бунинг учун ўзгарувчиларнинг коэффициентлари йиғиндисини топамиз, бунда модуль белгиси инобатга олинмайди: $1+3-1=3$. Демак, сон ўқида четки нуқталардан кейин келган нуқталарда тенгламанинг қийматлари 3 га ўзгариб боради.

Энди $|3-x|+|12+3x|-|x-5|$ ифоданинг $3; -4; 5$ даги қийматларини топамиз: $x=-4$ да -2 га, $x=3$ да 19 га ва $x=5$ да 29 га тенг бўлади.

Бу қийматларни сон ўқида тасвирлайлик. (10-расм)



10-расм

Энди ифоданинг қиймати 17 га тенг бўладиган сон ўқидаги нуқталарни топамиз. $x=2$ да ифоданинг қиймати 16 га тенг бўлиб, $x=2$ да ифоданинг қиймати 16 га тенг бўлади. $x=2$ ва $x=3$ орасида ифоданинг қиймати 3 бирликка ўзгаради. Шунинг учун $x=2$ га $\frac{1}{3}$ қўшилса, сон ўқида унга мос тенгламанинг 17 га тенг қиймати ҳосил бўлади. Агар $x=2$ га $\frac{2}{3}$ қўшилса, сон ўқида унга мос тенгламанинг 18 га тенг қиймати ҳосил бўлади. Демак, тенгламанинг битта илдизи $x_1=2\frac{1}{3}$. Худди шу усул билан тенгламанинг иккинчи илдизини ҳам топиш мумкин: $x_2=-10\frac{1}{3}$. Жавоб: $x_1=2\frac{1}{3}$ ва $x_2=-10\frac{1}{3}$

5. $\left|a+\left|b-\left|c+\left|dx+e\right|\right|\right|\right|=m$ **кўринишидаги тенгламаларни ечиш.**

Берилган кўринишдаги тенгламани ечишда қуйидаги жиҳатларга эътибор бериш лозим:

1) $dx+e=0$ тенглама илдизи топилади ва сон ўқида тасвирланади.

2) x нинг турли қийматларда $\left|a+\left|b-\left|c+\left|dx+e\right|\right|\right|\right|$ ифода ҳисобланади.

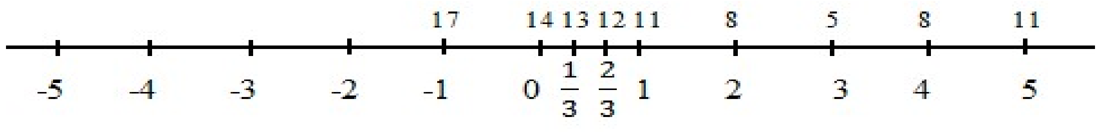
3) x нинг шундай қиймати топиладики, ундан кейинги қийматларда ифоданинг қиймати тенгламада x нинг коэффициенти нечага тенг бўлса, шунча миқдорда ўзгариб боради.

4) Аниқланган ўзгаришлар асосида тенгламанинг илдизлари топилади.

Қуйидаги мисолни кўрайлик.

9-мисол. $\left|3+\left|2-\left|4+\left|3x-9\right|\right|\right|\right|=12$ тенгламани ечинг.

Ечиш: $3x-9=0$ тенгламадан $x=3$ топамиз ва уни сон ўқига жойлаштирамиз. Кейин x нинг турли қийматларда $\left|3+\left|2-\left|4+\left|3x-9\right|\right|\right|\right|$ ифодани ҳисоблаймиз. x нинг қандайдир қийматларидан кейин ифоданинг қиймати тенгламада x нинг коэффициенти нечага тенг бўлса, шунча миқдорда ўзгариб боради. Масалан, x нинг коэффициенти 5 га тенг бўлса, 5 бирликка ўзгариб боради. Шунга қараб, тенгламанинг илдизларини топиш мумкин бўлади. Сон ўқида x нинг турли қийматлари ва унга мос $\left|3+\left|2-\left|4+\left|3x-9\right|\right|\right|\right|$ ифоданинг қийматлари тасвирланган. (11-расм)



11-расм

Ифода $x=2$ да 8 га, $x=1$ да 11 га ва $x=0$ да 14 га тенг бўлади. Сон ўқига эътибор берилса, қийматлар 3 бирликка ўзгармоқда. Энди ифоданинг қиймати 12 га тенг бўлган нуқтани топиш керак. Сон ўқидан аёнки, тенгламанинг илдизлари: $x_1=\frac{2}{3}$ ва $x_2=5\frac{1}{3}$.

Хулоса қилиб айтиш мумкинки, сон ўқида модулли тенгламаларни ечиш усули модуль тушунчаси таърифига асосланади. Модулли тенгламаларни тасвир ва кўргазмалиликдан фойдаланиб, илдизларни танлаш орқали ечиш методикаси ўқувчиларга математик қонуниятларни аниқлашга имкон беради. Модулли тенгламаларни сон ўқида ечишда тенгламанинг таснифи ва ечиш усуллари ҳамда методик кўрсатмалар ўқувчиларнинг мантиқий фикрлашини ривожлантириш ва ҳисоблашни тезлаштириш, тенглама илдизларини тезкор топиш малакасини оширишга хизмат қилади.

Адабиётлар:

1. А.Зеленский А., Парфилов И. Решение уравнений и неравенств с модулем. Универ. Пресс. 2009. 112 с.
2. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения. − М., 2005.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор)