

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

---

---

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.  
ILMIY  
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади  
Йилда 6 марта чиқади

1-2017  
ФЕВРАЛЬ

**НАУЧНЫЙ  
ВЕСТНИК.  
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года  
Выходит 6 раз в год

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

**Х.ҚОСИМОВ, М.АБДУОЛИМОВА**

Гиперболик турдаги тенглама учун силжишли чегаравий масала ечимининг ягона эмаслиги ҳақида ..... 5

**А.ЮСУПОВА**

Олий математика фани бўйича оралиқ назоратларни тест шаклида ўтказишнинг ўзига хос хусусиятлари ..... 10

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

**Р.РАСУЛОВ, М.МАМАТОВА, А.ЗОКИРОВ, И.ЭШБОЛТАЕВ**

Электронларнинг гетероструктура потенциал тўсиғи орқали ўтишларида резонансли туннелланиши ..... 13

БИОЛОГИЯ, КИМЁ

**М.АХМАДАЛИЕВ, И.ТУРДИБОЕВ**

Том ёпқи махсулотлари ишлаб чиқариш муаммолари ва истиқболлари ..... 16

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

**П.БАРАТОВ, Н.СУЛТАНОВА**

Тоғли Зарафшон водийсининг геоморфологик хусусиятлари ва террасалари ..... 19

**М.НАЗАРОВ, Р.АКБАРОВ**

Тупроқни бойитишда биотик чиқиндилардан фойдаланишнинг ўсимликлар ҳосилдорлигига таъсири ..... 24

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ФАЛСАФА, СИЁСАТ, ТАРИХ

**Т.АБДУЛЛАЕВ**

Фалсафа фанининг долзарб муаммолари ..... 29

**Р.АРСЛОНЗОДА**

Ўзбекистон Республикасининг ҳозирги замон архив тизими ..... 34

**К.РАХИМОВ**

Сополли маданияти металл эритиш хумдонлари ..... 39

**А.АБДУМАЛИКОВ**

Фуқаролик жамиятини қуришда ахборот маданиятини шакллантиришнинг ўрни ва аҳамияти ..... 44

АДАБИЁТШУНОСЛИК

**А.САБИРДИНОВ, Д.КОМИЛОВА**

Чўлпон ҳикояларида миллийлик ..... 46

**Г.МУҲАММАДЖОНОВА**

Ижодкор образи талқини: муштараклик ва ўзига хослик (А.Қаҳҳорнинг “Сароб” ва Жек Лондоннинг “Мартин Иден” романлари мисолида) ..... 49

ТИЛШУНОСЛИК

**Ш.ҚАЛАНДАРОВ**

Эвфемик маъно лисоний ва нолисоний омиллар қуршовида ..... 53

## О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

**Х.Косимов, М.Абдуолимова**

### Аннотация

*Ушбу мақолада умумлашган Трикоми тенгламаси учун чегаравий шартда каср тартибли умумлашган оператор қатнашган битта силжишли масала ўрганилган.*

### Аннотация

*В данной статье изучена одна задача со смещением для обобщённого уравнения Трикоми, где в краевом условии участвует обобщённый оператор дробного порядка.*

### Annotation

*In this paper a shifting condition problem which boundary condition of it includes generalized fractional operator for the generalized Tricomi equation was investigated.*

**Таянч сўз ва иборалар:** умумлашган Трикоми тенгламаси, чегаравий шарт, силжишли масала, каср тартибли умумлашган оператор.

**Ключевые слова и выражения:** обобщённое уравнение Трикоми, краевые условия, задача со смещением, обобщённый оператор дробного порядка.

**Key words and expressions:** generalized Tricomi equation, boundary condition, problem with shifting condition, generalized fractional operator.

Рассмотрим уравнение

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} = 0, \quad m = \text{const} > 0 \quad (1)$$

в области  $D$ , ограниченной характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точки  $A(0,0), B(1,0)$  и отрезком  $AB$  прямой  $y=0$ .

Введем операторы дробного интегрирования от функции по другой функции в следующем виде [1.788].

$$F_{0x} \left[ \begin{matrix} a, & b \\ c; & g(x) \end{matrix} \right] \varphi(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\tilde{A}(-\tilde{n})} \int_0^x [g(x) - g(t)]^{-c-1} F(a, b, -c; \frac{g(x) - g(t)}{g(x)}) \varphi(t) g'(t) dt, & c < 0 \\ [g(x)]^a \frac{d}{dg(x)} [g(x)]^{-a} F_{0x} \left[ \begin{matrix} a, & b+1 \\ c-1, & g(x) \end{matrix} \right] \varphi(x), & 0 < c < 1 \end{cases}$$

где  $a, b, c$  – действительные числа;  $g(x)$  – монотонная функция, имеющая непрерывную производную;  $\varphi(x) \in C(0,1) \cap L_1(AB)$ ;  $\Gamma(z)$  – гамма функция Эйлера [2];  $F(a, b, z; x)$  – гипергеометрическая функция Гаусса [2.800].

**Задача.** Найти функцию  $U(x, y)$  удовлетворяющую условиям:

- 1)  $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup AB)$ ;
- 2)  $U(x, y)$  регулярное решение уравнения (1) в области  $D$ ;
- 3)  $U(x, y)$  удовлетворяет условиям

$$U(x, 0) = \tau(x), \quad x \in \overline{AB} \quad (2)$$

**Х.Н.Косимов** – ФерГУ, кандидат физико-математических наук, доцент.  
**М.К.Абдуолимова** – магистрант по специальностям математики ФерГУ.

$$F_{0x} \begin{bmatrix} a, b \\ c; x^2 \end{bmatrix} U[\theta(x)] = a(x)U_y(x, 0) + b(x), \quad x \in AB \quad (3)$$

где  $a, b, c$  – действительные числа;  $a(x), b(x), \tau(x)$  – заданные функции;  $\theta(x)$  – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки  $(x, 0) \in AB$  с характеристикой  $AC$ .

**Теорема:** Пусть выполнены следующие условия:

- 1)  $1 - b < c < 2 - b, \quad c > b > 0, \quad 2\alpha = \frac{m}{m+2};$
- 2)  $v(x) = (x^2)^{c+b+\frac{2\alpha-3}{2}} v_1(x), \quad v_1(x) \in C^1(J), \quad v_1(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overline{AB};$
- 3)  $\tau(x) = (x^2)^\sigma \tau_1(x), \quad \tau_1(x) \in C(\overline{J}) \cap C^3(J), \quad c + b + \alpha - 1 < \sigma < c + b;$
- 4)  $a(x), b(x) \in C(\overline{J}), \quad (x^2)^{-b} a(x) \neq 0, \quad \forall x \in \overline{AB};$

Тогда задача (1) – (3) имеет бесчисленное множество решений.

Доказательство решения задачи Коши для уравнения (1) в области  $D$  имеет вид:

$$U(x, y) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 \tau \left[ x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{\alpha-1} dt - \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^1 v \left[ x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] [t(1-t)]^{-\alpha} dt. \quad (4)$$

Из (4) находим

$$U[\theta(x)] = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} x^{1-2\alpha} D_{0x}^{-\alpha} x^{\alpha-1} \tau(x) - \left( \frac{m+2}{4} \right)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} D_{0x}^{1-\alpha} x^{-\alpha} v(x). \quad (5)$$

Пользуясь формулой (5) из условия (3), получим уравнение относительно  $v(x) = U_y(x, 0)$

$$a(x)v(x) + \gamma_1(x)\Phi[v(x)] = F(x), \quad x \in AB \quad (6)$$

здесь

$$\Phi[v(x)] = \frac{d}{dx^2} \psi(x) \quad (7)$$

$$\psi(x) = (x^2)^{-b} F_{0x} \begin{bmatrix} a+1, b \\ c-1; x^2 \end{bmatrix} D_{0x}^{\alpha-1} x^{-\alpha} v(x) \quad (8)$$

$$F(x) = \frac{d}{dx} x^{-b} F_{0x} \begin{bmatrix} a+1, b \\ c-1; x^2 \end{bmatrix} x^{1-2\alpha} D_{0x}^{-\alpha} x^{\alpha-1} \tau(x). \quad (9)$$

Для выполнения выражения (8), (9) воспользуемся преобразованием Михлина [3.312]

$$f(x) \rightarrow f^*(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx \quad (10)$$

Легко доказать, что

$$x^l F_{0x} \left[ \begin{matrix} a, b \\ c; x \end{matrix} \right] \varphi(x) \rightarrow \Gamma \left[ \begin{matrix} 1+c-l-s, 1-a-b-l-s \\ 1-a-b-s, 1-b-l-s \end{matrix} \right] \varphi^*(s-c+l) \quad (11)$$

$$\operatorname{Re} s < \min \{1+c-l, 1-a-b\}$$

Тогда, учитывая соотношение (11) из (8), получим

$$\psi(\sqrt{x}) \rightarrow 2\Gamma \left[ \begin{matrix} c+b-s, -a-s, 2-\alpha+2b+2c-2s \\ -a+b-s, 1-s, 3+2b+2c-2s \end{matrix} \right] \psi^*(2s-2b-2c-\alpha+3) \quad (12)$$

Применяя формулы [2.800]

$$\Gamma(2\beta) = 2^{2\beta-1} (\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma(\beta) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})$$

$$G_{pq}^{mn} \left( x \left| \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) \rightarrow \Gamma \left[ \begin{matrix} s+b_1, \dots, s+b_m, 1-a_1-s, \dots, 1-a_n-s \\ s+a_{n+1}, \dots, s+a_p, 1-b_{m+1}-1-s, \dots, b_q-s \end{matrix} \right]$$

из (12) имеем соотношение

$$\psi(x) = (x^2)^{-b-c} \int_0^x (y^2)^{\frac{1-2\alpha}{2}} G_{44}^{40} \left( \frac{y^2}{x^2} \left| \begin{matrix} -a-c, 1-b-c, \frac{3}{2}, 2 \\ 0, -a-b-c, \frac{2+\alpha}{2}, \frac{3+\alpha}{2} \end{matrix} \right. \right) v(y) dy^2 \quad (13)$$

$$F(x) = \gamma_2 \frac{d}{dx^2} \int_0^x (y^2)^{b-c} \times$$

$$\times G_{44}^{40} \left( \frac{y^2}{x^2} \left| \begin{matrix} a-b-c, 1+\alpha, 1-b-c-\frac{\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}-b-c \\ 1+a-b, 0, 2-\alpha-b-c, \frac{3}{2}-\alpha-b-c \end{matrix} \right. \right) \tau(y) dy^2 - b(x) \quad (14)$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2-2\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot 2^{2-\alpha}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \cdot 2^{1+\alpha}.$$

$G_{44}^{40}(z)$  – функция Мейера [1.788].

Применяя к обеим частям равенства (12) оператор

$$\frac{d}{dx^2} (x^2)^{b+c} \int_0^x G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) dt^2,$$

получим

$$(x^2)^{\frac{1-2\alpha}{2}} v(x) = \frac{d}{dx^2} (x^2)^{b+c} \int_0^x G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) \psi(t) dt^2 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx^2} \psi(x) + a_1(x) \cdot (x^2)^{b+c-1} ((b+c+1) \times \\ & \times \int_0^x \varphi(t) G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) dt^2 + \\ & + \int_0^x G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) \Phi(t) \cdot t^2 \cdot dt^2 = F(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Из (5), (6) и (8) приходим

$$\begin{aligned} & \Phi(x) + a_1(x) \cdot (x^2)^{b+c-1} ((b+c+1) \times \\ & \times \int_0^x G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) dt^2 \int_0^t \Phi(s) ds + \\ & + \int_0^x G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) \Phi(t) \cdot t^2 \cdot dt^2 = F(x) + g(x) \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} & g(x) = (b+c+1) a_1(x) \cdot (x^2)^{b+c-1} \psi(0) \times \\ & \times \int_0^x G_{44}^{40} \left( \frac{t^2}{x^2} \left| \begin{matrix} b+c-1, -a-1, b+c+\frac{\alpha}{2}, b+c+\frac{1+\alpha}{2} \\ -a+b-1, -1, b+c+\frac{1}{2}, b+c+1 \end{matrix} \right. \right) dt^2 \\ & a_1(x) = \gamma_1^{-1} a(x) \cdot (x^2)^{-b+\frac{2\alpha-1}{2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя формулы вычисления интегралов от функции Мейера  $G_{44}^{40}(z)$ , нетрудно убедиться в том, что (17) есть интегральное уравнение Вольтера 2-го ряда с ядром со слабой особенностью. Отсюда следует, что оно имеет решение. Тогда, в силу эквивалентности следует, что задача (1) – (3) разрешима.

Для доказательства неединственности решения задачи (1) – (3) достаточно показать, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (6), имеет нетривиальное решение.

После некоторых преобразований из (17) получим интегральное уравнение Вольтера 2-го ряда с правой частью  $g(x)$ .

В силу условия теоремы  $g(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \overline{AB}$ .

---

МАТЕМАТИКА

---

Следовательно, существует нетривиальное решение однородного уравнения. Поэтому, согласно общей теории [4.232], неоднородное уравнение (4) имеет бесчисленное множество решений. Теорема доказана.

**Литература:**

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
2. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986.
3. Марычев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций. – Минск: Наука, 1978.
4. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: “Физматгиз”, 1959.

*(Рецензент: А.Уринов, доктор физико-математических наук, профессор).*