ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

4-2021

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

Муассис: Фарғона давлат университети.

«FarDU. ILMIY XABARLAR – НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ» журнали бир йилда олти марта чоп этилади.

Журнал филология, кимё ҳамда тарих фанлари бўйича Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрлар рўйхатига киритилган.

Журналдан мақола кўчириб босилганда, манба кўрсатилиши шарт.

Ўзбекистон Республикаси Президенти Администрацияси ҳузуридаги Ахборот ва оммавий коммуникациялар агентлиги томонидан 2020 йил 2 сентябрда 1109 рақами билан рўйхатга олинган.

Муқова дизайни ва оргинал макет ФарДУ таҳририят-нашриёт бўлимида тайёрланди.

Таҳририят манзили:
150100, Фарғона шаҳри, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.
Тел.: (0373) 244-44-57. Мобил тел.: (+99891) 670-74-60
Сайт: www.fdu.uz

Босишга рухсат этилди:
Қоғоз бичими: - 60×84 1/8
Босма табоғи:
Офсет босма: Офсет қоғози.
Адади: 50 нусха
Буюртма №
ФарДУ нусха кўпайтириш бўлимида чоп этилди.
Манзил: 150100, Фарғона ш., Мураббийлар кўчаси, 19-уй.

Фарғона,
2021.

МУНДАРИЖА

Аниқ ва табиий фанлар

Ижтимоий-гуманитар фанлар

УДК 517.7:514.7

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУППЫ $Sp(3,C)$

$Sp(3,C)$ ГРУППАСИНИНГ ПОЛИНОМИАЛ ИНВАРИАНТЛАРИ

POLYNOMIAL INVARIANTS OF THE GROUP $Sp(3,C)$

Муминов Кобилжон Кодирович[1],Муминов Улугбек Рахимович[2]

[1]**Муминов Кобилжон Кодирович,** – *Национальный университет Узбекистана, профессор.*

[2]**Муминов Улугбек Рахимович,** –*ФерГУ, стажер исследователь.*

Аннотация

Тўрт ўлчовли фазода $Sp(3,C)$ группага нисбатан инвариант бўлган полиномиал функциялар ҳалқасининг ташкил этувчилари келтирилган.

Аннотация

В четырехмерном пространстве заданы составляющие кольца полиномиальных функций, инвариантных относительно группы $Sp(3,C)$.

Annotation

In four-dimensional space, the constituents of the ring of polynomial functions invariant with respect to the group $Sp(3,C)$ are given.

Таянч сўз ва иборалар: *инвариант кўпҳад, группанинг чекли фазодаги таъсири, инвариант кўпҳадлар ҳалқасининг ташкил этувчилари.*

Ключевые слова и выражения: *инвариантный многочлен, действие группы в конечномерном пространстве, образующие кольцо инвариантных многочленов.*

Key words and word expressions: *invariant polynomial, action of a group in a finite-dimensional space, forming a ring of invariant polynomials.*

Пусть $X = C^4$ четырехмерное симплектическое пространство над полем С комплексных чисел (т.е. 4-мерное линейное пространство, снабженное невырожденным кососимметрическим скалярным произведением). Для векторов $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in C^4$ положим $[x\ y] = x_1 y_4 - x_4 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2$.

Напомним, что симплектическая группа $Sp(4,C)$ состоит из всех линейных преобразований комплексного векторного пространства размерности $4 = 2 \cdot 2$, сохраняющих кососимметрическую форму $[x\ y]$. Условие принадлежности матрицы g группе $Sp(4,C)$ записывается в виде

$$gIg^T = I \text{, где } I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда, в частности, следует, что матрица g имеет детерминант, равный ± 1; в действительности можно показать, что этот детерминант равен $+1$ $\left(\left[5\right],\ \S 113\right)$

Заметим, что группа $Sp\left(4,C\right)$ содержит подгруппу L, изоморфную $Sp\left(2n-2\right)=Sp\left(2,C\right)$. Эта подгруппа выделяется условием сохранения координат x_1 и x_4. Остальные координаты подвергаются произвольному симплектическому преобразованию на $Sp\left(2,C\right)$, т.е. L состоит из матриц

$$\ell=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, A\in Sp\left(2,C\right)$$

С другой стороны, рассмотрим в группе $Sp\left(4,C\right)$ подгруппу H, состоящую из матриц вида

$$h=\begin{pmatrix}1 & t & \tau\\ 0 & \ell & \tilde{t}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t_2 & t_3 & \tau\\ 0 & 1 & 0 & t^3\\ 0 & 0 & 1 & -t^2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

где ℓ - единичная матрица порядка 2, t - произвольная строка из чисел t_2, t_3, τ - произвольное число и $\tilde{t}$ линейно выражается через t ($\tilde{t}$ столбец, состоящий из чисел t_3, $-t_2$ в порядке нумерации сверху вниз).

Если $L=Sp\left(2,C\right)$ действует на H с помощью автоморфизмов $\ell\left(h\right): h\to\ell^{-1}h\ell=h^{\ell}$, $\ell\in L$, $h\in H$, то декартово произведение $L\times H$ является группой, если определим наше умножение при помощи формулы $\left(\ell,h\right)\left(\ell_1 h_1\right)=\left(\ell\ell_1,\ell_1^{-1}h\ell_1 h_1\right)=(\ell\ell_1,h^{\ell}h_1)$.

Эта группа *называется полупрямым произведением* групп H и L и обозначается через $Sp\left(2n-1\right)=L\rhd H$. (Напомним, пусть L и H – подгруппы группы $G=Sp\left(2n-1\right)$, причем H – нормальный делитель. Говорят, что группа G является *полупрямым произведением подгрупп* H и L, если $H\bigcap L=\{E\}$ и $H\cdot L=G$). При этом группа H вкладывается в $Sp\left(2n-1\right)$ как нормальная подгруппа: $h\to(1,h)$, а $L=Sp\left(2n-2\right)=Sp\left(2\right)$ как подгруппа $\ell=(\ell,1)$, так что каждый элемент группы $G=Sp\left(2n-1\right)$ можно однозначно записать в виде $\ell h(\ell\in L,h\in H)$.

В $C^{2n}(n=2)$ зададим действие группы $G=Sp\left(2n-1\right)=Sp\left(3\right)$ как умножение матрицы $g\in G$, справа на вектор – строк $x\in C^4: xg$

Если $g \in G$, $p(x,y,z)$ - полином, то определим функцию $g \cdot p$, полагая $g \cdot p\left(x,y,z\right) = p(xg,yg,zg)$. Многочлен p называется G – *инвариантным*, если $g \cdot p = p$ для всех $g \in G$.

Множество всех G – инвариантных многочленов порождает подалгебру $J_K^G = J_3^G$, в алгебре всех функций J_3 на C^4 со значениями в C, где $k = 3$ число переменных $\left[2\right]$.

Поскольку группа G нередуктивна, естественно возникают следующие вопросы:

I. Верна ли теорема Гильберта о конечности числа образующих алгебры J_k^G ? $\left(\left[6\right]\ \S\ 3\right)$

II. Если – да, то выяснить явный вид этих образующих.

Теорема. Пусть $x,y,z \in C^4$, J_k^G – алгебра всех инвариантных многочленов для группы G от переменных x,y,z. Тогда многочлены x_1,y_1,z_1, $\left[x_0,y_0\right]$, $\left[x_0,z_0\right]$, $\left[y_0,z_0\right]$, где $x_0 = (x_2,x_3)$ принадлежат J_3^G, является образующими J_3^G.

Будем говорить, что система из конечного числа элементов $A = \{x_i, i = \overline{1,k}\}$ является системой образующих алгебры A, если любой из элементов $y \in A$ может быть получен из конечного числа элементов множества A применением конечного числа раз операций алгебры A.

Лемма. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \in C^4$.

Тогда x_1,y_1,z_1,x_4,y_4,z_4, $\left[x_0,y_0\right] = x_2y_3 - x_3y_2$, $\left[x_0z_0\right]$, $\left[y_0,z_0\right] \in J_3^{Sp(2n-2)}$ являются образующими кольца $J_3^{Sp(2n-1)}$, где $x_0 = (x_2,x_3)$.

Доказательство. Пусть $L = Sp\left(2n-2\right)$. Учитывая первую основную теорему для симплектической группы $\left[1\right]$и действие групп C^4 имеем: если $P\left(x,y\right) \in J_3^L$, то

$$P(x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2,y_3,y_4,z_1,z_2,z_3,z_4) \equiv$$
$$\equiv Q(x_1,x_4,y_1,y_4,z_1,z_4\left[x_0,y_0\right],\left[x_0,z_0\right],[y_0,z_0])$$

для любого $x,y,z \in C^4$.

Так как P многочлен, то существует k такое, что $\dfrac{\partial^k Q}{\partial[x_0, y_0]^k} = 0$.

Далее, для x_1 существует r ,что из $\dfrac{\partial^r P}{\partial x_1^r} \equiv 0$ следует $\dfrac{\partial^r Q}{\partial x_1^r} \equiv 0$, т.е. Q есть многочлен от x_1 при фиксированных остальных переменных. Аналогичное рассуждение верно для x_4, y_1, y_4, z_1, z_4 это рассуждение показывает, что Q есть многочлен относительно $x_1, x_4, y_1, y_4, z_1, z_4$, $[x_0, y_0],[x_0, z_0],[y_0, z_0]$ т.е. произвольное $P \in J_3^L$ есть многочлен от $x_1, x_4, y_1, y_4, z_1, z_4, [x_0, y_0],[x_0, z_0],[y_0, z_0]$.

Теперь используя эту лемму доказываем теорему.

Известно $([6]\ \S\ 3)$ все G–инвариантные многочлены образуют подалгебру J_3^G алгебры многочленов J_3, она является градированной подалгеброй, т.е. алгебра $A = J_3$ обладает естественной G– инвариантной градировкой $A = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n$, где A_n- (конечномерное) пространство однородных многочленов степени n . Очевидно, что

$$A^G = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} A_n^G.$$

Для каждого n подпространство A_n^G выделяется в A_n системой однородных линейных уравнений $gp = p(g \in G)$, т.е. при действии группы G все однородные многочлены остаются однородными.

Поэтому достаточно рассмотреть только однородные многочлены: $p(x_1, y_1, z_1, x_4, y_4, z_4) = \sum\limits_{i+j+z+k+\ell+m=s} a_{i\,jk\,\ell}\, x_1^i y_1^j z_1^r x_4^k y_4^\ell z_4^m$. Учитывая инвариантность p и разлагая степени t и τ получаем

$$\begin{aligned} p = gp(x_1, y_1, z_1, x_4, y_4, z_4) = p(x_1, y_1, z_1, x_1\tau + x_2 t_3 - x_3 t_2 + x_4, y_1\tau + \\ + y_2 t_3 - xy_3 t_2 + y_4, z_1\tau + z_2 t_3 - z_3 t_2 + z_4) = \\ = p + \left[p'_{x_4} \cdot (-x_3) + p'_{y_4} \cdot (-y_3) + p'_{z_4} \cdot (-z_3) \right] t_2 + \\ + \left[p'_{x_4} \cdot (x_2) + p'_{y_4} \cdot (y_2) + p'_{z_4} \cdot (-z_2) \right] t_3 + \\ + \left[p'_{x_4} \cdot (x_1) + p'_{y_4} \cdot (y_1) + p'_{z_4} \cdot (-z_1) \right] \tau + \ldots \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} p'_{x_4}\cdot(-x_3)+p'_{y_4}\cdot(-y_3)+p'_{z_4}\cdot(-z_3)=0 \\ p'_{x_4}\cdot x_2+p'_{y_4}\cdot y_2+p'_{z_4}\cdot z_2=0 \\ p'_{x_4}\cdot x_1+p'_{y_4}\cdot y_1+p'_{z_4}\cdot z_1=0 \end{cases}$$

Так как $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ линейно независимые переменные, детерминант $\begin{vmatrix} x_3 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$ и система имеют единственное решение $P'_{x_4} \equiv 0,\ P'_{y_4} \equiv 0,\ P'_{z_4} \equiv 0$.

Это означает, что P не зависит от x_4, y_4, z_4. Теорема доказана.

Известно $([3], \S 10)$

Следствие. Все инварианты произвольного числа векторов для группы $G \subset GL(2n, C)$ могут быть найдены, если известны все полиномиальные инварианты от не более $2n-1$ векторов, в частности $2\cdot 2-1=3$ векторов.

Литература:

1.Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. -М.: Ил.,1947.
2.Спрингер Т. Теория инвариантов. -М.: Мир, 1981.
3.Дьедоне Ж., Керрол Дж. Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов. -М.: Мир,1974.
4.Винберг Э.Б. Компактные группы Ли. – МГУ, 1967.
5.Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. -М.: МЦНМО, 2007.
6.Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. фундамен. направл. -1989. т.

(Рецензент: А.Уринов – физико-математических наук, профессор)