ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

FarDU. ILMIY XABARLAR-

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2019

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. ФерГУ

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

КИМЁ

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

ТАРИХ

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

УДК: 517.956

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

А.С.Бердышев, М.С.Азизов

Аннотация

Мақолада тўртинчи тартибли сингуляр коэффициентли тенглама учун тўғри тўртбурчакда бир чегаравий масала ечимининг ягоналик ва мавжудлик ҳақидаги теоремалар спектрал усули билан исботланган.

Аннотация

В данной работе спектральным методом доказаны теоремы единственности и существования решения одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольной области.

Annotation

In the present work with spectral method it was proved the uniqueness and existence of the solution of the mixed problem for a fourth order equation with singular coefficients in a rectangular domain.

Таянч сўз ва иборалар: *тўртинчи тартибли дифференциал тенглама, сингуляр коэффициент, чегаравий масала, спектрал усул, ечимнинг ягоналиги, ечимнинг мавжудлиги.*

Key words and word expressions: *the fourth order differential equation, singular coefficient, boundary-value problem, spectral method, the uniqueness of the solution, the existence of the solution.*

Ключевые слова и выражения: *дифференциальное уравнение четвертого порядка, сингулярный коэффициент, краевая задача, спектральный метод, единственность решения, существование решения.*

1. Постановка задачи.

В прямоугольнике $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ для уравнения

$$Lu=u_{xxxx}+u_{tt}+\frac{2\gamma}{t}u_t=f(x,t),\ 0<\gamma<1/2 \tag{1}$$

рассмотрим следующую смешанную задачу.

Задача A *. Найти в области* Ω *решение* $u(x,t)$ *уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным*

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ 0\le x\le p; \tag{2}$$

$$\lim_{t\to 0} t^{2\gamma}u_t(x,t)=\varphi_2(x),\ 0<x<p \tag{3}$$

и краевым

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(p,t)=0,\quad u_{xxx}(0,t)=0,\quad u_{xxx}(p,t)=0,\quad 0\le t\le T \tag{4}$$

условиям, где $f(x,t)$, $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *- заданные функции.*

В последние годы изучению вопроса разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка было посвящено много работ. Например, в работах [1]-[4] исследован ряд проблем для уравнений четвёртого порядка. В частности, в работе [1] в прямоугольнике изучена самосопряженная краевая задача для уравнения $u_{xxxx}-u_{tt}=f(x,t)$. В этой работе получены условия регулярной, сильной и почти всюду разрешимости изучаемой задачи. А в работе [2] изучена одна краевая задача для уравнения $u_{tt}+u_{xxxx}=f(x,t)$, где получены условия самосопряженности, при которых соответствующая задача имеет точечный

А.С.Бердышев – КазНПУ, профессор кафедры математики и математическое моделирование, доктор физико-математических наук.
М.С.Азизов – ФерГУ, преподаватель кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ФерГУ.

спектр. В работе [3] исследована краевая задача для смешанного уравнения четвёртого порядка в виде $u_{tt}+\operatorname{sgn} t\, u_{xxxx}=f(x,t)$ в прямоугольнике $\{(x,t):0<x<p,-T<t<T\}$. Доказаны существование и единственность регулярного и сильного решения изучаемой задачи. В работе [4] рассматривалась краевая задача для общего линейного уравнения

$$u_{tt}-u_{xxxx}+au_{xxx}-bu_{xx}+cu_x+du_x+eu_t=f(x,t),$$

где, a,b,c,d,e - постоянные числа. В настоящей работе докажем однозначную разрешимость поставленной задачи A.

Определение. *Функцию $u(x,t)\in C^{3,1}_{x,t}(\bar{\Omega})\cap C^{4,2}_{x,t}(\Omega)$ назовем регулярным решением задачи A при $f(x,t)\in C(\Omega)$, если она в области Ω удовлетворяет условиям (2)-(4) и уравнению (1).*

2. Единственность решения.

Теорема 1. *Если существует регулярное решение задачи A, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи A. Их разность удовлетворяет соответствующей однородной задаче A. Обозначим эту разность через $u(x,t)$, т.е.

$$u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t). \tag{5}$$

Известно, что функции

$$X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{p}},\qquad X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_n x,\qquad \lambda_n=\frac{n\pi}{p},\qquad n=1,2,... \tag{6}$$

образуют в $L_2(0,p)$ полную ортонормированную систему.

Следуя [5], рассмотрим функции

$$d_n(t)=\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx,\qquad n=0,1,2,... \;. \tag{7}$$

На основании (7) введем функции

$$d_{n,\varepsilon}(t)=\int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u(x,t)X_n(x)dx, \tag{8}$$

где ε - достаточно малое положительное число.

Дифференцируя равенство (8) по t, получим

$$d'_{n,\varepsilon}(t)=\int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_t(x,t)X_n(x)dx,\; d''_{n,\varepsilon}(t)=\int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_{tt}(x,t)X_n(x)dx.$$

Учитывая вид уравнения (1) при $f(x,t)\equiv 0$, из последних равенств имеем

$$d''_{n,\varepsilon}(t)+\frac{2\gamma}{t}d'_{n,\varepsilon}(t)=-\int_\varepsilon^{p-\varepsilon} u_{xxxx}(x,t)X_n(x)dx. \tag{9}$$

Правую часть (9) интегрируем четыре раза по частям, затем переходим к пределу при $\varepsilon\to 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[d''_{n,\varepsilon}(t)+\frac{2\gamma}{t}d'_{n,\varepsilon}(t)\right]=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n(p-\varepsilon)u_{xxx}(p-\varepsilon,t)-X_n(\varepsilon)u_{xxx}(\varepsilon,t)\right]-$$
$$-\lambda_n\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X'_n(p-\varepsilon)u_{xx}(p-\varepsilon,t)-X'_n(\varepsilon)u_{xx}(\varepsilon,t)\right]+$$
$$+\lambda_n^2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X''_n(p-\varepsilon)u_{x}(p-\varepsilon,t)-X''_n(\varepsilon)u_{x}(\varepsilon,t)\right]+$$
$$+\lambda_n^3\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X'''_n(p-\varepsilon)u(p-\varepsilon,t)-X'''_n(\varepsilon)u(\varepsilon,t)\right]-\lambda_n^4\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon}u(x,t)X_n(x)dx.$$

Отсюда, с учётом однородных условий, соответствующих (4), и свойств функции $X_n(x)$, получим

$$d''_n(t)+\frac{2\gamma}{t}d'_n(t)=-\lambda_n^4\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx,\quad n=0,1,2,\ldots .$$

В последнем равенстве, учитывая (7), имеем

$$d''_n(t)+\frac{2\gamma}{t}d'_n(t)+\lambda_n^4 d_n(t)=0,\qquad n=0,1,2,\ldots . \tag{10}$$

Общее решение этого уравнения запишется в виде [6]

$$d_n(t)=a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right),$$

где a_n и b_n - произвольные постоянные, а $J_w(z)$ - функция Бесселя первого рода порядка w [6].

Здесь для нахождения неизвестных коэффициентов a_n и b_n используем однородные условия, соответствующие (2) и (3), в силу (5) и (7), которые переходят в $d_n(0)=0$ и $\lim\limits_{t\to 0}t^{2\gamma}d_n{}'(t)=0$. Подчиняя этим условиям функцию (10), имеем $a_n=0$, $b_n=0$. Следовательно, $d_n(t)=0$ при $\forall t\in[0,T]$. Тогда равенство (7) примет вид

$$\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx=0,\qquad n=0,1,2,\ldots .$$

Отсюда следует, чо функция $u(x,t)$ ортогональна всем функциям полной системы (6). Следовательно, $u(x,t)\equiv 0$. Тогда, в силу (5), $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, т.е. решение задачи A единственно. Теорема доказана.

3. Существование решения задачи A

Для доказательства существования решения задачи A применим метод разделения переменных. Доказательство опирается на следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $f(x,t)\in C^{4,0}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right)$, $f_{xxxxx}(x,t)\in C(\Omega)\cap L_2(\Omega)$, $f_x(0,t)=f_x(p,t)=0$, $f_{xxx}(0,t)=f_{xxx}(p,t)=0$ *и* $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C^4[0,p]$, $\varphi_1^{(5)}(x),\varphi_2^{(5)}(x)\in C(0,p)\cap L_2(0,p)$, $\varphi_1'(0)=\varphi_1'(p)=0,$ $\varphi_2'(0)=\varphi_2'(p)=0,$ $\varphi_2'''(0)=\varphi_2'''(p)=0,$ *то регулярное решение задачи* A *существует.*

Доказательство. Решение уравнения (1) при $f(x,t)\equiv 0$ ищем в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{11}$$

Подставляя (11) в однородное уравнение, соответствующее (1), затем разделяя переменные, получаем

$$\frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)}=-\frac{T''(t)}{T(t)}-\frac{2\gamma}{t}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Последнее равенство, левая часть которого зависит только от x, а правая - только от t, возможно лишь в том случае, если обе части не зависят ни от x, ни от t, т.е. представляют собой постоянную. Обозначим эту постоянную через λ^4. Тогда из последнего равенства получим обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X^{(IV)}(x)-\lambda^4X(x)=0,\quad 0<x<p; \tag{12}$$

$$T''(t)+\frac{2\gamma}{t}T'(t)+\lambda^4T(t)=0,\ 0<t<T.$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$X(x)=m_1e^{-\lambda x}+m_2e^{\lambda x}+m_3\cos\lambda x+m_4\sin\lambda x, \tag{13}$$

где m_j, $j=\overline{1,4}$ - произвольные постоянные.

Используя условия (4), которые переходят в следующие

$$X'(0)=X'(p)=X'''(0)=X'''(p)=0,$$

имеем

$$X_n(x)=m_{3n}\cos\frac{n\pi}{p}x,\ n=0,1,\dots . \tag{14}$$

Нормируя $X_n(x)$, находим $m_{3n}=\sqrt{2/p}$ при $n\in N$ и $m_{30}=1/\sqrt{p}$ при $n=0$, следовательно, система функции (14) запишется в виде (6).

Теперь решение задача A ищем в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\cdot X_n(x). \tag{15}$$

Подставив ряд (15) в уравнение (1), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[u_n''(t)+\frac{2\gamma}{t}u_n'(t)+\lambda_n^4u_n(t)\right]X_n(x)=f(x,t). \tag{16}$$

Разложим правую часть уравнения (1), т.е. функцию $f(x,t)$ в интеграле $(0,p)$ в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$:

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)\,X_n(x), \tag{17}$$

где

$$f_n(t)=\int_0^p f(x,t)X_n(x)dx,\ n=0,1,2,\dots. \tag{18}$$

Сравнивая разложения (17) и (16) для одной и той же функции $f(x,t)$, получим дифференциальные уравнения

$$u_n''(t)+\frac{2\gamma}{t}u_n'(t)+\lambda_n^4 u_n(t)=f_n(t),\qquad n=0,1\dots, \tag{19}$$

определяющие функции $u_n(t)$. Решая уравнение (19) при $n\in N$ методом вариации постоянных, находим его общее решение

$$u_n(t)=a_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)+$$

$$+\frac{\pi J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)}{\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2\tau\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\pi J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right)}{\cos\gamma\pi}\int_0^t J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2\tau\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau,\qquad n=1,2,\dots, \tag{20}$$

где a_n и b_n - произвольные постоянные.

При $n=0$ уравнение (19) примет вид

$$u_0''(t)+\frac{2\gamma}{t}u_0'(t)=f_0(t).$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$u_0(t)=\frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}a_0+b_0+\frac{1}{1-2\gamma}\int_0^t\left[t^{1-2\gamma}-\tau^{1-2\gamma}\right]\tau^{2\gamma}f_0(\tau)d\tau, \tag{21}$$

где a_0 и b_0 - произвольные постоянные.

Подставляя решения (20) и (11) в ряд (15), имеем

$$u(x,t)=\frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}a_0+b_0+\frac{1}{1-2\gamma}\int_0^t\left[t^{1-2\gamma}-\tau^{1-2\gamma}\right]\tau^{2\gamma}f_0(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{a_n t^{1/2-\gamma}J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)+b_n t^{1/2-\gamma}J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right)+\frac{\pi}{\cos\gamma\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t\left[J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2 t\right)J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2\tau\right)-J_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2 t\right)J_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2\tau\right)\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma}\tau f_n(\tau)d\tau\right\}X_n(x). \tag{22}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a_n и b_n воспользуемся условиями (2) и (3). Удовлетворяя решение (22) условиям (2) и (3), находим коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^p\varphi_2(x)dx,\ b_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^p\varphi_1(x)dx, \tag{23}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\Gamma\left(1/2-\gamma\right)\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\right)^{\gamma-1/2}\int\limits_0^p \varphi_2\left(x\right)X_n\left(x\right)dx\,,\; n=1,2,....,\quad (24)$$

$$b_n=\Gamma\left(1/2+\gamma\right)\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\right)^{1/2-\gamma}\int\limits_0^p \varphi_1\left(x\right)X_n\left(x\right)dx\,,\; n=1,2,.... \quad (25)$$

Следовательно, решение задачи представляется в виде (22), где a_0, b_0, a_n, b_n определяются формулами (23)-(25).

Лемма 1. $\forall t\in\left[0,T\right]$ при $n=0,1,2,...$ справедливы оценки

$$\left|u_0\left(t\right)\right|\le\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|a_0\right|+\left|b_0\right|+\frac{T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\left\|f_0\right\|_{L_2(0,T)},\; \left|t^{2\gamma}u_0'\left(t\right)\right|\le\left|a_0\right|+T^{2\gamma}\sqrt{T}\left\|f_0\right\|_{L_2(0,T)},$$

$$t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma}u_0'\left(t\right)\right]\le\left\|f_0\right\|_{C(0,T)},$$

$$\left|u_n\left(t\right)\right|\le\left|a_n\right|T^{1-2\gamma}\frac{2\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\left(1-2\gamma\right)\Gamma\left(1/2-\gamma\right)}+\left|b_n\right|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}+\frac{4}{1-2\gamma}T\sqrt{T}\left\|f_n\right\|_{L_2(0,T)},\quad (26)$$

$$\left|t^{2\gamma}u_n'\left(t\right)\right|\le\left|a_n\right|\frac{2\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}C_1}{\Gamma\left(1/2-\gamma\right)}+\left|b_n\right|\frac{2\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma+3/2}T^{1+2\gamma}}{\left(1/2+\gamma\right)\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}+\lambda_n^4C_2\left\|f_n\right\|_{L_2(0,T)},\quad (27)$$

$$\left|t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma}u_n'\left(t\right)\right]\right|\le\lambda_n^4\left[\left|a_n\right|T^{1-2\gamma}\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma\left(3/2-\gamma\right)}+\left|b_n\right|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\right]+$$

$$+\frac{4\lambda_n^4}{1-2\gamma}T\sqrt{T}\left\|f_n\right\|_{L_2(0,T)}+\left\|f_n\right\|_{C(\bar{\Omega})},\quad (28)$$

где C_1 и C_2 - некоторые положительные постоянные.

Доказательство. С помощью функции Бесселя-Клиффорда $\bar{J}_w\left(z\right)=\Gamma\left(w+1\right)\left(z/2\right)^{-w}J_w\left(z\right)$ функции (20) перепишутся в виде

$$u_n\left(t\right)=\frac{a_n\,t^{1-2\gamma}\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma\left(3/2-\gamma\right)}\bar{J}_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2t\right)+\frac{b_n\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}\bar{J}_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2t\right)+$$

$$+\frac{1}{1/2-\gamma}\int\limits_0^t\left[\bar{J}_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2t\right)\bar{J}_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2\tau\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-2\gamma}-\bar{J}_{\gamma-1/2}\left(\lambda_n^2t\right)\bar{J}_{1/2-\gamma}\left(\lambda_n^2\tau\right)\right]\tau\,f_n\left(\tau\right)d\tau.$$

Отсюда, в силу $\left|\bar{J}_w\left(z\right)\right|\le1$ при $w>-1/2$, следует неравенство

$$\left|u_n\left(t\right)\right|\le\left|a_n\right|\frac{t^{1-2\gamma}\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma\left(3/2-\gamma\right)}+\left|b_n\right|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma\left(\gamma+1/2\right)}+$$

$$+\frac{t^{1-2\gamma}}{1/2-\gamma}\int\limits_0^t\left|\tau^{2\gamma}\right|\cdot\left|f_n(\tau)\right|d\tau+\frac{1}{1/2-\gamma}\int\limits_0^t|\tau|\cdot\left|f_n(\tau)\right|d\tau.$$

Теперь, учитывая $0<t<T$, $\tau<t$ и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\left|u_n(t)\right|\le\left|a_n\right|\frac{T^{1-2\gamma}\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)}+\left|b_n\right|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}+\frac{4T}{1-2\gamma}\sqrt{\int\limits_0^T d\tau\cdot\int\limits_0^T f_n^2(\tau)d\tau}\le$$

$$\le\left|a_n\right|T^{1-2\gamma}\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)}+\left|b_n\right|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}+\frac{4}{1-2\gamma}T\sqrt{T}\left\|f_n\right\|_{L_2(0,T)}.$$

Из (23) легко следует, что a_0 и b_0 ограничены. Тогда, учитывая $0\le(\tau/t)^{1-2\gamma}\le 1$ и используя неравенство Коши – Буняковского, из (21) имеем

$$\left|u_0(t)\right|\le\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|a_0\right|+\left|b_0\right|+\frac{1}{1-2\gamma}\left|\int\limits_0^t\left[t^{1-2\gamma}-\tau^{1-2\gamma}\right]\tau^{2\gamma}f_0(\tau)d\tau\right|=$$

$$=\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|a_0\right|+\left|b_0\right|+\frac{1}{1-2\gamma}\left|\int\limits_0^t\left[1-\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-2\gamma}\right]\left(\frac{\tau}{t}\right)^{2\gamma}t\,f_0(\tau)d\tau\right|=$$

$$\le\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|a_0\right|+\left|b_0\right|+\frac{1}{1-2\gamma}\left|\int\limits_0^T T\,f_0(\tau)d\tau\right|\le\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|a_0\right|+\left|b_0\right|+$$

$$+\frac{T}{1-2\gamma}\sqrt{\int\limits_0^T d\tau\cdot\int\limits_0^T f_0^2(\tau)d\tau}\le\frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma}\left|a_0\right|+\left|b_0\right|+\frac{T\sqrt{T}}{1-2\gamma}\left\|f_0\right\|_{L_2(0,T)}.$$

С помощью неравенства Коши – Буняковского производные $t^{2\gamma}u_n'(t)$, $t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma}u_n'(t)\right]$, $t^{2\gamma}u_0'(t)$, $t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma}u_0'(t)\right]$ оцениваются аналогично. Лемма доказана.

Исследуем теперь сходимость полученного решения (22) и рядов

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4 u_n(t)X_n(x),\tag{29}$$

$$t^{2\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 t^{2\gamma}u_n'(t)X_n(x),\tag{30}$$

$$t^{-2\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{2\gamma}u_0'(t)\right]=-\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^4 u_n(t)X_n(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(t)X_n(x).\tag{31}$$

Мажорантным рядом для (29) будет

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4\left|u_n(t)\right|.\tag{32}$$

Отсюда, учитывая оценку (26) и отбрасывая константы $T^{1-2\gamma}\Big/(1-2\gamma)$, и $4T\sqrt{T}\Big/(1-2\gamma)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^4|a_n|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)}+\lambda_n^4|b_n|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}+\lambda_n^4\|f_n\|_{L_2(0,T)}\right].$$

Следовательно, нам нужно доказать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda_n^4|a_n|\frac{2\left(\lambda_n^2/2\right)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(1/2-\gamma)}+\lambda_n^4|b_n|\frac{\left(\lambda_n^2/2\right)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)}\right], \quad (33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4\|f_n\|_{L_2(0,T)}. \quad (34)$$

Интегрируя (24) и (25) по частям пять раз и принимая во внимание условия, наложенные на функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, получаем

$$a_n=\lambda_n^{-5}b_n^{(5)},\ \ b_n=\lambda_n^{-5}a_n^{(5)}, \quad (35)$$

где

$$b_n^{(5)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\right)^{\gamma-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\gamma\right)\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p\varphi_2^{(5)}(x)\sin\lambda_n x\,dx,$$

$$a_n^{(5)}=\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\right)^{1/2-\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p\varphi_1^{(5)}(x)\sin\lambda_n x\,dx.$$

Подставляя (35) в (33), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n^{(5)}}{n}+\frac{b_n^{(5)}}{n}\right]. \quad (36)$$

Сходимость ряда (36) следует из элементарных неравенств

$$\frac{a_n^{(5)}}{n}\le\frac{1}{2}\left[\left(a_n^{(5)}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right],\ \frac{b_n^{(5)}}{n}\le\frac{1}{2}\left[\left(b_n^{(5)}\right)^2+\frac{1}{n^2}\right]$$

и из сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^{(5)}+b_n^{(5)}\right],\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

первый из которых сходится, в силу неравенства Бесселя для непрерывных функций $\varphi_1^{(5)}(x)$ и $\varphi_2^{(5)}(x)$, а второй ряд является сходящимся, т.к. обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}$ сходится при $\alpha>1$. Значит, ряд (33) сходится.

Интегрируя 5 раз по частям интеграл (18) и учитывая условия, наложенные на $f(x,t)$, получаем

$$f_n(t)=\frac{1}{\lambda_n^5}\overline{f}_{n5}(t),\ n=1,2,..., \tag{37}$$

где

$$\overline{f}_{n5}(t)=\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^p\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\sin\lambda_n x dx,\ n=1,2,.... \tag{38}$$

В силу равенства (37), ряд (34) перепишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left\|\overline{f}_{n5}\right\|_{L_2(0,T)}. \tag{39}$$

На основании неравенства Коши – Буняковского

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left\|\overline{f}_{n5}\right\|_{L_2(0,T)}\le\sqrt{\frac{p^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\overline{f}_{n5}\right\|^2_{L_2(0,T)}}.$$

Как указано выше, первый ряд в правой части последнего неравенства сходится. Покажем сходимость второго ряда. В силу (17) и (38), имеем

$$\left\|\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right\|^2_{L_2(\Omega)}=\left(\frac{\partial^5 f}{\partial x^5},\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right)_{L_2(\Omega)}=\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_{n5}(t)\cdot\sin\lambda_n x,\sqrt{\frac{2}{p}}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{f}_{m5}(t)\cdot\sin\lambda_m x,\right)_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\frac{2}{p}\int_0^T\int_0^p\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_{n5}(t)\cdot\sin\lambda_n x\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_{m5}(t)\cdot\sin\lambda_m x dx dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\overline{f}^2_{n5}(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\overline{f}_{n5}\right\|^2_{L_2(0,T)^2},$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\overline{f}_{n5}\right\|^2_{L_2(0,T)^2}=\left\|\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}\right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{40}$$

(40) является аналогом равенства Парсеваля для непрерывной функции $\left(\partial^5/\partial^5 x\right)f(x,t)$. Следовательно, ряд (39), т.е. ряд (34) сходится.

На основании доказанного выше заключаем, что мажорирующий ряд (32) сходится. Значит, ряд (29) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$. Аналогично доказывается, что ряды (30) и (31) также абсолютно и равномерно сходятся в $\overline{\Omega}$. Сходимость ряда (22) следует из сходимости рядов (29), (30) и (31).

Итак, если выполняются условия теоремы 2, то решение задачи A $u(x,t)$, определяемое рядом (22), можно дифференцировать почленно два раза по t и четыре раза по x, при этом полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{\Omega}$. Отсюда следует, что $u(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right)$. Теорема доказана.

Литература:

1. Аманов Д., Юлдашева А.В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // Узб. мат. ж. -2007. -№ 4.
2. Отарова Ж.А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // Узб. мат. ж. -2008. -№ 2.
3. Аманов Д. Отарова Ж.А. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка // Узб. мат. ж. 2008. № 3.
4. Е.В.Максимова, Н.А.Чуешева. Краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка // Вестник КемГУ. -2011. -№ 3/1.
5. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1999. -№ 8 (35).
6. Ж.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций. -Том. 1. -М.: Изд. ИЛ, 1949.