

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**FarDU.
ILMIY
XABARLAR-**

1995 йилдан нашр этилади
Йилда 6 марта чиқади

2-2019

**НАУЧНЫЙ
ВЕСТНИК.
ФерГУ**

Издаётся с 1995 года
Выходит 6 раз в год

М У Н Д А Р И Ж А

Аниқ ва табиий фанлар

МАТЕМАТИКА

А.К.Ўринов, А.Н.Рафиков

Иккита сингуляр коэффициентли гиперболик типдаги тенгламанинг умумий ечимини
қуриш.....5

А.С.Бердышев, М.С.Азизов

Тўғри тўртбурчакда тўртинчи тартибли сингуляр коэффициентли тенглама учун аралаш
масала.....10

ФИЗИКА, ТЕХНИКА

О.Деҳқонова, Ф.Юсупова

Умумий ўрта таълим мактабларида физикани ўрганиш самарадорлигини оширишда
интерфаол методларни қўллаш20

КИМЁ

Б.Саттарова, И.Асқаров, А.Жўраев, К.Киргизов

Табиий ва синтетик озиқ-овқат қўшилмаларининг фойдали ва зарарли хусусиятлари.....24

Ғ.Очилов, Г.Турсунова, Р.Карабаева, А.Иброхимов, М.Исақов

Мева данакларидан адсорбентлар олиш ва физик-кимёвий хоссаларини ўрганиш.....27

БИОЛОГИЯ, ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИ

Р.Х.Максудов

Асаларичилик ва ушбу соҳа ривожидида олий маълумотли мутахассисларнинг ўрни31

ГЕОГРАФИЯ, ТУПРОҚШУНОСЛИК

Р.Қ.Қўзиев, Н.Ю.Абдурахмонов, Н.Ж.Халилова

Тупроқ унумдорлигини баҳолашнинг айрим жиҳатлари.....34

Ижтимоий-гуманитар фанлар

ИҚТИСОДИЁТ

А.Гафуров, Г.Халматжанова, А.Мирзаев

Ўзбекистон иқтисодиётида инновация ва модернизация38

ТАРИХ

А.Маҳмудов

Усмон Хўжа Пўлатхўжаев ижтимоий-сиёсий фаолиятини ўрганишнинг манбашунослиги ва
тарихшунослиги42

Ў.Хошимов, Р.Шукурулаев

Ўзбекистонда мустақиллик йилларида олий таълим муассасаларида кадрлар
тайёрлашдаги ўзгаришлар (Фарғона водийси мисолида).....46

Т.Хатамов

Ўзбекистонда халқ таълими тизимининг моддий-техника базасини мустаҳкамлаш,
хорижий тилларни ўқитиш ва кадрларни қайта тайёрлашда халқаро муносабатларнинг
илмий таҳлили.....50

У.Хўжамуратов

Ўзбекистонда ширкат хўжаликларидаги муаммолар ва уларнинг тугатилиши.....55

А.Алохунов

Фарғона қадимги шарқ илк деҳқон жамоаларининг миграциялари даврида.....60

ФАЛСАФА, СИЁСАТ

Ж.Я.Яхшиликков, Б.Мирзарахимов

Жамият ҳаётига мафкуравий муносабатларнинг таъсири ва уларнинг намоён бўлиши
хусусиятлари64

Б.Ғаниев, М.Ғаниева, М.Неъматова

Ҳуқуқ фалсафасига доир қарашлар: назария ва амалиёт.....67

Ш.Аббосова

Глобаллашув шароитида жамият хавфсизлиги ҳамда мамлакат барқарорлигини
таъминлаш масалалари.....72

УДК: 517.956

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.К.Ўринов, А.Н.Рафиков

Аннотация

Мақолада иккита сингуляр коэффициентга эга бўлган гиперболик типдаги тенгламанинг умумий ечими қурилган.

Аннотация

В статье построено общее решение одного гиперболического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами.

Annotation

In the article the general solution of an hyperbolic equation with two singular coefficients was constructed.

Калит сўз ва иборалар: гиперболик типдаги тенглама, сингуляр коэффициент, умумий ечим.

Ключевые слова и выражения: гиперболическое уравнение, сингулярный коэффициент, общее решение.

Key words and word expressions: equation of hyperbolic type, singular coefficient, general solution.

Рассмотрим уравнение

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s}u_s - \frac{2\beta}{\zeta}u_\zeta = 0 \quad (1)$$

в область $G = \{(s, \zeta) : 0 < \zeta < s\}$ плоскости $sO\zeta$, причем здесь $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1/2$. Нетрудно убедиться в том, что общее решение уравнения (1) в области G имеет вид

$$u(s, \zeta) = s^{-\alpha} \int_0^1 [z(1-z)]^{\beta-1} \varphi[s + (2z-1)\zeta] F(\alpha, 1-\alpha, \beta; \rho) dz + \\ + s^{-\alpha} \zeta^{1-2\beta} \int_0^1 [z(1-z)]^\beta \phi[s + (2z-1)\zeta] F(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; \rho) dz, \quad (2)$$

где $\rho = \zeta^2 z(1-z) / [s(s + (2z-1)\zeta)]$, а $\varphi(z)$, $\phi(z)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Предположим, что $\beta = (1/2)$, тогда (2) содержит только одну произвольную функцию. Поэтому она не является общим решением уравнения (1) при $\beta = 1/2$. Естественно, представляет интерес нахождение в области G общего решения уравнения (1) при $\beta = 1/2$. Потому что с помощью представления общего решения того или иного уравнения, можно найти информацию о начальных и краевых задачах, корректно поставленных для этого уравнения.

С этой целью в области G рассмотрим более общее уравнение

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s}u_s - \frac{2\beta}{\zeta}u_\zeta - \lambda^2 u = 0, \quad (3)$$

из которого при $\lambda = 0$ следует уравнение (1). Здесь λ - произвольное действительное заданное число.

Из результатов работ [1], [2] следует, что при $0 < \beta < 1$, $\beta \neq (1/2)$ общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u(s, \zeta) = s^{-\alpha} \int_0^1 \varphi(z) [t(1-t)]^{\beta-1} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, \beta; \omega, \sigma) dt +$$

А.К.Ўринов - ФерГУ, доктор физико-математических наук, профессор.
А.Н.Рафиков - ФерГУ, кандидат физико-математических наук.

$$+\zeta^{1-2\beta} s^{-\alpha} \int_0^1 \phi(z)[t(1-t)]^{-\beta} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; \omega, \sigma) dt, \quad (4)$$

где

$$\Xi_2(a, b, c; x, y) = \sum_{j, k=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_{j+k} j! k!} x^j y^k.$$

-гипергеометрическая функция Гумберта [3], $z = s + (2t-1)\zeta$, $\omega = \zeta^2 t(1-t)(sz)^{-1}$, $\sigma = -\lambda^2 \zeta^2 t(1-t)$, $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1)$.

Но при $\beta = (1/2)$ выражение (4) содержит только одну произвольную функцию и, поэтому, оно не является общим решением уравнения (3).

Найдем общее решение уравнения (3) при $\beta = (1/2)$. С этой целью, следуя [4], положив $\beta = (1/2) - \varepsilon$ и заменив функции $\varphi(z)$, $\phi(z)$ на

$$\frac{\varphi(z)}{2} + \frac{\phi(z)}{2\varepsilon}, \quad \frac{\varphi(z)}{2} - \frac{\phi(z)}{2\varepsilon}$$

соответственно (где ε - достаточно малое положительное число), получим

$$u_\varepsilon(s, \zeta) = s^{-\alpha} \int_0^1 \varphi(z) K_1(s, \zeta, t; \varepsilon) dt + s^{-\alpha} \int_0^1 \phi(z) K_2(s, \zeta, t; \varepsilon) dt, \quad (5)$$

где

$$K_1(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ [t(1-t)]^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \frac{1}{2}-\varepsilon; \omega, \sigma\right) + \right. \\ \left. + \zeta^{2\varepsilon} [t(1-t)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \frac{1}{2}+\varepsilon; \omega, \sigma\right) \right\}, \\ K_2(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ [t(1-t)]^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \frac{1}{2}-\varepsilon; \omega, \sigma\right) - \right. \\ \left. - \zeta^{2\varepsilon} [t(1-t)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \frac{1}{2}+\varepsilon; \omega, \sigma\right) \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_1(s, \zeta, t; \varepsilon) = [t(1-t)]^{\frac{1}{2}} \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \frac{1}{2}; \omega, \sigma\right). \quad (6)$$

Вычислим $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_2(s, \zeta, t; \varepsilon)$. Для этого, пользуясь равенством [5]

$$\Xi_2(a, b, c; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} x^j \bar{J}_{c+j-1}(2i\sqrt{y})$$

(здесь $\bar{J}_j(z) = \Gamma(j+1)(z/2)^{-j} J_j(z)$, а $J_j(z)$ -функция Бесселя первого рода порядка j [6]) и четностью функции $\bar{J}_j(z)$, функцию $K_2(s, \zeta, t; \varepsilon)$ перепишем в виде

$$K_2(s, \zeta, t; \varepsilon) = [t(1-t)]^{-\frac{1}{2} + \varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (1-\alpha)_j}{j!} K_3(s, \zeta, t; \varepsilon), \quad (7)$$

где

$$K_3(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \bar{J}_{j-\varepsilon+1/2}(\sigma_1) \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)_j \right]^{-1} - \right. \\ \left. - [\zeta t(1-t)]^{2\varepsilon} \bar{J}_{j-\varepsilon+1/2}(\sigma_1) \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)_j \right]^{-1} \right\}, \quad \sigma_1 = 2\lambda\zeta\sqrt{t(1-t)}.$$

Функцию $K_3(s, \zeta, t; \varepsilon)$ представим в виде

$$K_3(s, \zeta, t; \varepsilon) = K_{31}(s, \zeta, t; \varepsilon) + K_{32}(s, \zeta, t; \varepsilon) + K_{33}(s, \zeta, t; \varepsilon), \quad (8)$$

где
$$K_{31}(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ 1 - [\zeta t(1-t)]^{2\varepsilon} \right\} \bar{J}_{j-\varepsilon+1/2}(\sigma_1) \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)_j \right]^{-1},$$

$$K_{32}(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)_j \right]^{-1} - \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)_j \right]^{-1} \right\} \bar{J}_{j-\varepsilon-1/2}(\sigma_1),$$

$$K_{33}(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \bar{J}_{j-\varepsilon-1/2}(\sigma_1) - \bar{J}_{j+\varepsilon-1/2}(\sigma_1) \right\} \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)_j \right]^{-1}.$$

В силу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (a^x - 1) = \ln a$, справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{31}(s, \zeta, t; \varepsilon) = -\ln[\zeta t(1-t)] \bar{J}_{j-1/2}(\sigma_1) \left[\left(\frac{1}{2} \right)_j \right]^{-1}. \quad (9)$$

Принимая во внимание равенство

$$\left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right)_j \right]^{-1} - \left[\left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right)_j \right]^{-1} = \Gamma\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \left[\frac{1}{\Gamma(j - \varepsilon + 1/2)} - \frac{1}{\Gamma(j + \varepsilon + 1/2)} \right] + \\ + \frac{1}{\Gamma(j + \varepsilon + 1/2)} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) - \Gamma\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \right],$$

нетрудно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{32}(s, \zeta, t; \varepsilon) = \frac{\sqrt{\pi} \bar{J}_{j-1/2}(\sigma_1)}{\Gamma(j+1/2)} \left[\psi\left(j + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad (10)$$

где $\psi(z)$ - логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$ [3].

Далее, согласно определению производной,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{33}(s, \zeta, t; \varepsilon) = - \left[\left(\frac{1}{2} \right)_j \right]^{-1} \frac{\partial \bar{J}_z(\sigma_1)}{\partial z} \Big|_{z=j-1/2}.$$

Отсюда, пользуясь разложением

$$\bar{J}_z(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(z+1)}{k! \Gamma(k+z+1)} \left(\frac{\sigma_1}{2} \right)^{2k}$$

и легко проверяемым равенством

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+z+1)} \right] = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+z+1)} [\psi(z+1) - \psi(k+z+1)],$$

находим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{33}(s, \zeta, t; \varepsilon) &= 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)_j \right]^{-1} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(j+1/2)}{k! \Gamma(j+k+1/2)} \left(\frac{\sigma_1}{2} \right)^{2k} \left[\psi \left(\frac{1}{2} + j + k \right) - \psi \left(\frac{1}{2} + j \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (5) и принимая во внимание (6)- (11), получим формулу для общего решения уравнения (3) при $\beta = (1/2)$:

$$\begin{aligned} u(s, \zeta) &= s^{-\alpha} \int_0^1 \phi(z) [t(1-t)]^{-1/2} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, 1/2; \omega, \sigma) dt + \\ &+ s^{-\alpha} \int_0^1 \phi(z) [t(1-t)]^{-1/2} \left\{ \ln [\zeta t(1-t)] \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, 1/2; \omega, \sigma) dt - \right. \\ &\left. - \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (1-\alpha)_j}{(1/2)_{j+k} j! k!} \left[\psi \left(\frac{1}{2} + j + k \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right] \omega^j \sigma^k \right\} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Полагая в (12) $\lambda = 0$ и учитывая $\Xi_2(a, b, c; x, 0) = F(a, b, c; x)$ получим, что общее решение уравнения

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s} u_s - \frac{1}{\zeta} u_{\zeta} = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} u(s, \zeta) &= s^{-\alpha} \int_0^1 \phi(z) [t(1-t)]^{-1/2} F(\alpha, 1-\alpha, 1/2; \omega) dt + \\ &+ s^{-\alpha} \int_0^1 \phi(z) [t(1-t)]^{-1/2} \left\{ \ln [\zeta t(1-t)] F(\alpha, 1-\alpha, 1/2; \omega) - \right. \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (1-\alpha)_j}{(1/2)_j j!} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + j\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \omega^j \Big\} dt.$$

Из формулы (12) следует, что задача Коши для уравнения

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s} u_s - \frac{1}{\zeta} u_{\zeta} - \lambda^2 u = 0$$

с начальными данными на линии $\zeta = 0$ в обычной постановке некорректна. В этом случае корректно поставлена задача с начальными условиями

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{u(s, \zeta)}{\ln \zeta} = \tau(s), \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \ln^2 \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{u(s, \zeta) - A(\tau)}{\ln \zeta} \right] = \nu(s),$$

где

$$A[\tau] = \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \tau(z) [t(1-t)]^{-1/2} (z/s)^\alpha \{ \ln[\zeta t(1-t)] \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, 1/2; \omega, \sigma) - \\ - \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j (1-\alpha)_j}{(1/2)_{j+k} j! k!} \left[\psi\left(\frac{1}{2} + j+k\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \omega^j \sigma^k \Big\} dt,$$

а $\tau(s) \in C[0, +\infty) \cap C^2(0, +\infty)$, $\nu(s) \in C^2(0, +\infty)$ - заданные функции.

Нетрудно убедиться, что решение этой задачи дается формулой

$$u(s, \zeta) = A[\tau] + \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \nu(z) [t(1-t)]^{-1/2} (z/s)^\alpha \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, 1/2; \omega, \sigma) dt.$$

Литература:

1. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешаного эллипτικο-гиперболического типа // Математический сборник. -Т. -1952 -№1.30(72).
2. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Краевые задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения // Труды института математики и компьютерных технологии. Выпуск IV. –Ашхабад, 1995.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. -Т. I. -М.: Наука, 1965,.
4. G.Darboux Leçons sur la theorie generale des surfaces.// 2-е ed. Paris, Gauthier-Villars, 1915.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. -Минск: «Наука и техника», 1987.
6. Кузнецов Д.С. Специальные функции. -М. : Высшая школа.-1965.