

UDK: 512.643.2

**KVARTERNION SONLAR JISMI USTIDA ANIQLANGAN
N-TARTIBLI MATRITSANING SATR DETERMINANTI VA UNING
XOSSALARI**

**СТРОЧНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ N-ГО ПОРЯДКА
МАТРИЦ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОННЫХ ЧИСЕЛ,
И ЕГО СВОЙСТВА**

**ROW DETERMINANT OF THE MATRIX OF THE N-TH ORDER OF
MATRICES DEFINED OVER THE BODY OF QUATERNION NUMBERS
AND ITS PROPERTIES**

Jo‘raboyev Saidaxbor Solijonovich¹

¹Farg‘ona davlat universiteti, fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa
doktori, (PhD);

Abdumutalova Nozimaxon Mansurjon qizi²

²Farg‘ona davlat universiteti 3-bosqich talabasi

Turdaliyeva Dilfuza Ulug‘bek qizi³

³Farg‘ona davlat universiteti 3-bosqich talabasi

Annotatsiya:

Ushbu maqolada kvaternion sonlar jismi ustida aniqlangan kvadrat matritsalarining satriy determinanti va uning xossalari o‘rganilgan. A kvadrat matritsaning i -satri bo‘yicha satr-determinant kvadrat matritsaning har bir satridan bittadan olingan elementlar ko‘paytmasining algebraik yig‘indisi ko‘rinishida ta’riflanadi. i -satr bo‘yicha satr-determinanti qiymatlari turlicha bo‘lib, kommutativ matritsaning determinantidan farq qiladi. Shu bilan birga ba’zi xossalari saqlanadi. Bunday xossalar satriy determinant ta’rifidan foydalanib isbotlandi.

Аннотация:

В данной статье изучается строчных определитель квадратных матриц, определенных над телом кватернионных чисел и его свойства. Строчным определителем по i -строке квадратной матрицы A определяется как алгебраическая сумма произведений элементов, взятых из каждой строки квадратной матрицы, по одному разу. Каждый строчным определителем по i -строке имеет разные значения и отличается от определителя коммутативной матрицы. В то же время некоторые свойства сохраняются. Эти свойства были доказаны с использованием определения строчных определителей.

Abstract:

This paper studies the row determinant of square matrices defined over the skew field of quaternion numbers and its properties. The row determinant of a square matrix A by the i -row is defined as the algebraic sum of products of elements taken from each row of the square matrix, once. Each row determinant by the i -row has different values and differs from the determinant of a commutative matrix. At the same time, some properties are preserved. These properties were proved using the definition of row determinants.

Kalit soʻzlar: kvaternion son; kvaternion matritsa; satr determinant

Ключевые слова: кватернионное число; матрица кватернионов; строчных определитель

Key words: quaternion number; quaternion matrix; row determinant

KIRISH

Maʼlumki, nokommutativ elementli halqalar uchun chiziqli algebra masalalarini oʻrganishda determinant tushunchasi va ularning xossalari muhim rol oʻynaydi. Nokommutativ elementli matritsalarining determinantlari nazariyasini taʼriflash usullariga asosan uch turga boʻlish mumkin.

Birinchi turga tegishli boʻlgan tadqiqot ishlarida determinantga quyidagicha taʼrif beriladi.

Aytaylik, $M(n, K)$ elementlari K halqaga tegishli n -tartibli kvadrat matritsalar halqasi boʻlsin.

1-taʼrif. Ushbu $d: M(n, K) \rightarrow K$ funksional uchun quyidagi shartlar oʻrinli boʻlsin:

1. Agar $A \in M(n, K)$ teskarilanuvchan boʻlmasligi uchun $d(A) = 0$ boʻlishi zarur va yetarli;
2. Barcha $A, B \in M(n, K)$ uchun $d(A \cdot B) = d(A)d(B)$;
3. Agar A' matritsa A matritsaning ixtiyoriy satriga chapdan biror songa koʻpaytirib qoʻshishdan yoki ixtiyoriy ustunini oʻngdan biror songa koʻpaytirib

boshqa ustuniga qo'shishdan hosil qilingan bo'lsa, $d(\mathbf{A}') = d(\mathbf{A})$. U holda, d -funktional $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(n, \mathbf{K})$ matritsaning determinanti deyiladi.

Kommutativ elementli matritsalarining determinantlari uchun yuqoridagi aksiomalar bajariladi. Ammo nokommutativ matritsalar uchun yuqoridagi aksiomalarni qanoatlantiruvchi formulani topish oson emas. Bu bo'yicha eng yaxshi natijalar D'edonne va Stadiga tegishli.

Ikkinchi turdagi tadqiqot ishlarida determinant tushunchasi matritsa elementlaridan tuzilgan ratsional funksiyalar orqali ta'riflangan. Natijada, fanga kvazideterminant tushunchasi olib kirildi.

Uchinchi yo'nalishga tegishli tadqiqot ishlarida determinant tushunchasi matritsa elementlaridan tuzilgan, belgilangan tartibdagi $n!$ ta ko'paytmalarning algebraik yig'indisi ko'rinishida ta'riflanadi. Bu yo'nalishda, *satriy determinant*, *ustun determinant*, *double determinant* kabi tushunchalar fanga olib kirildi.

Ushbu ishda kvaternion elementli n -tartibli kvadrat matritsalarining satriy determinanti va uning xossalari o'rganilgan.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Birinchi turdagi tadqiqot ishlari D'edonne-Stadi [1], I.S.Ponizovkiy [2] kabi olimlarga tegishli. Ular o'z ishlarida nokommutativ matritsa determinantini aksiomatik usul bilan aniqlashga harakat qilishgan. Biroq nokommutativ bo'lgan holda 1)-3) shartlarni bir vaqtda qanoatlantiruvchi formula topilmagan.

Ikkinchi turdagi ishlar I.M.Gelfand va V.S.Retaxga tegishli bo'lib, fanga kvazideterminant tushunchasini olib kirgan, [3-4].

Uchinchi turdagi tadqiqot ishlari E.G.Mur, Chen Long Xuan va F.D.Daysonlarga tegishli, [5-6].

NATIJA VA MUHOKAMALAR

Kvaternion son deb, $q = \omega + xi + yj + zk$ ko'rinishda aniqlangan sonlarga aytiladi, bu yerda $\omega, x, y, z \in \mathbf{R}$, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Kvaternion sonlarni qo'shish va ko'paytirish amali huddi to'rt noma'lumli birinchi darajali ko'phadlarni qo'shish va ko'paytirish kabi aniqlanadi. Barcha kvaternion sonlar to'plami qo'shish va ko'paytirish amaliga nisbatan sonlar jismini hosil qiladi va $\mathbf{H}$ orqali belgilanadi. Shuningdek, $\bar{q} = \omega - xi - yj - zk$ kvaternion $q = \omega + xi + yj + zk$ kvaternionning qo'shmasi, $\|q\| = \sqrt{q \cdot \bar{q}}$ son esa q kvaternionning normasi deyiladi. Har qanday $q \neq 0$ kvaternionga teskari kvaternion $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ tenglik

bilan aniqlanadi.

2-ta'rif. $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}(n, \mathbf{H})$ matritsaning i -satr determinanti deb

$$r \det_i \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{i i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} K a_{i_{k_1+l_1} i} K a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} K a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}$$

yig'indiga aytiladi, bu yerda $S_n - I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ to'plamda aniqlangan simmetrik grupp,

$$\sigma = (i i_{k_1} i_{k_1+1} K i_{k_1+l_1})(i i_{k_2} i_{k_2+1} K i_{k_2+l_2}) K (i i_{k_r} i_{k_r+1} K i_{k_r+l_r})$$

r -yoyilmadagi bog'liqsiz sikllar soni.

Masalan, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}(3, \mathbf{H})$ bo'lsin. Bu holda $I_3 = \{1, 2, 3\}$ to'plamda aniqlangan barcha o'rinashtirishlarni bog'liqsiz sikllar ko'paytmasi ko'rinishida yozamiz. $\sigma_1 = (1)(2)(3)$, $\sigma_2 = (1)(2,3)$, $\sigma_3 = (1,2)(3)$, $\sigma_4 = (1,3)(2)$, $\sigma_5 = (1,2,3)$, $\sigma_6 = (1,3,2)$.

Bu holda, $\mathbf{A}$ matritsani 1-satr determinanti

$$r \det_1 \mathbf{A} = (-1)^{3-3} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{3-2} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{3-2} a_{12} a_{21} a_{33} +$$

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{3-2}a_{13}a_{31}a_{22} + (-1)^{3-1}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{3-1}a_{13}a_{32}a_{21} = \\
& = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22};
\end{aligned}$$

A matritsaning 2-satr determinanti quyidagicha aniqlanadi:

$$\sigma_1 = (2)(1)(3), \sigma_2 = (2)(1,3), \sigma_3 = (2,1)(3), \sigma_4 = (2,3)(1), \sigma_5 = (2,3,1), \sigma_6 = (2,1,3).$$

$$\begin{aligned}
r \det_2 \mathbf{A} &= (-1)^{3-3}a_{22}a_{11}a_{33} + (-1)^{3-2}a_{22}a_{13}a_{31} + (-1)^{3-2}a_{21}a_{12}a_{33} + \\
& + (-1)^{3-2}a_{23}a_{32}a_{11} + (-1)^{3-1}a_{23}a_{31}a_{12} + (-1)^{3-1}a_{21}a_{13}a_{32} = \\
& = a_{22}a_{11}a_{33} + a_{23}a_{31}a_{12} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11};
\end{aligned}$$

Aytaylik, $\mathbf{A}^{ij} - \mathbf{A}$ matritsani i -satri va j -ustunini o‘chirishdan hosil qilingan matritsa bo‘lsin. a_{gj} orqali j -ustunni, a_{ig} orqali i -satrni belgilaymiz. $\mathbf{A}_{gj}(b)$ – matritsa, $\mathbf{A}$ matritsaning j -ustunini b -ustun bilan almashtirganimizni, $\mathbf{A}_{ig}(b)$ esa i -satrni b -satr bilan almashtirishdan hosil bo‘lgan matritsani belgilaymiz.

1-lemma. $\mathbf{R}_{ij} - \mathbf{A}$ matritsaning a_{ij} elementlarini o‘ng algebraik to‘ldiruvchisi bo‘lsin. Bu holda barcha $i = \overline{1, n}$ uchun $r \det_i \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot R_{ij}$ tenglik o‘rinli, bu yerda

$$R_{ij} = \begin{cases} -r \det_j \mathbf{A}_{\cdot j}^{ii}(\mathbf{a}_{\cdot i}), & i \neq j \\ r \det_k \mathbf{A}^{ii}, & i = j, k = \min \{I_n / \{i\}\} \end{cases}.$$

Masalan, $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ matritsani 1-satr elementlarini algebraik to‘ldiruvchilari quyidagicha aniqlanadi:

$$R_{11} = r \det_2 \mathbf{A}^{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32};$$

$$R_{12} = -r \det_2 \mathbf{A}_{\cdot 2}^{11}(a_{\cdot 1}) = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31};$$

$$R_{13} = -r \det_3 \mathbf{A}_{\mathfrak{g}}^{11}(a_{\mathfrak{g}}) = - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = -a_{31}a_{22} + a_{32}a_{21}$$

$$\begin{aligned} r \det_{11} \mathbf{A} &= a_{11}R_{11} + a_{12}R_{12} + a_{13}R_{13} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}) = \\ &= a_{11}R_{11} + a_{12}R_{12} + a_{13}R_{13} \end{aligned}$$

Quyida $\mathbf{H}$ ustida aniqlangan n -tartibli kvadrat matritsalar satriy determinantining xossalarini o'rganamiz.

1-xossa. Agar $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(n, \mathbf{H})$ matritsaning satrlaridan biri nollardan iborat bo'lsa, barcha $i = \overline{1, n}$ uchun $r \det_i \mathbf{A} = 0$ bo'ladi;

Isbot. Xossani isbotlash uchun $r \det_i$ -satriy determinantni ta'rifidan foydalanamiz. Umumiylikka ziyon yetkazmay matritsaning 1-satri nollardan iborat bo'lsin, u holda $i \in I_n / \{1\}$ nomer uchun satriy determinantni qaraymiz. Buning uchun

$$\sigma = (i i_{k_1} i_{k_1+1} \mathbf{K} i_{k_1+l_1})(i_{k_2} i_{k_2+1} \mathbf{K} i_{k_2+l_2}) \mathbf{K} (i_{k_r} i_{k_r+1} \mathbf{K} i_{k_r+l_r}) \in S_n$$

sikllar yoyilmasiga mos ko'paytmasini qaraymiz, bu yerda $i_{k_r+l_r} \in I_k$, $k_1 < i_{k_2} < \mathbf{K} < i_{k_r}$. Tabiiyki $i_{k_r+l_r}$ nomer 1-sonini faqat bir marta qabul qiladi. Bu holda $a_{1i_{k_r+l_r}} = 0$ bo'lib, σ mos ko'paytma ham nol bo'ladi, ya'ni

$$a_{ii_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \mathbf{K} a_{i_{k_1+l_1} i} \mathbf{K} a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \mathbf{K} a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = 0$$

Demak,

$$r \det_i \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{ii_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \mathbf{K} a_{i_{k_1+l_1} i} \mathbf{K} a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \mathbf{K} a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = 0$$

2-xossa. Agar $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}(n, \mathbf{H})$ matritsaning i -satri chapdan $\forall b \in \mathbf{H}$ songa ko'paytirilsa, u holda barcha $i = \overline{1, n}$ uchun $r \det_i \mathbf{A}_{ig}(b \cdot a_{ig}) = b \cdot r \det_i \mathbf{A}$ tenglik o'rinli bo'ladi;

Isbot. Ushbu xossaning ham isboti satriy determinantning ta'rifidan kelib chiqadi. Umumiylikka ziyon yetkazmay $i=1$ deb olamiz va $\mathbf{A}$ matritsaning 1-satri elementlariga chapdan b sonni ko'paytiramiz va $r \det_1 \mathbf{A}_{1g}(b \cdot a_{1g})$ determinantni qaraymiz.

Bu holda, $r \det_1 \mathbf{A}$ determinant hadlariga mos keluvchi ixtiyoriy $\sigma \in S_n$ o'rin almashtirish

$$\sigma = (1, i_{k_1} i_{k_1+1} \text{K} i_{k_1+l_1})(i_{k_2} i_{k_2+1} \text{K} i_{k_2+l_2}) \text{K} (i_{k_r} i_{k_r+1} \text{K} i_{k_r+l_r})$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak, $r \det_1 \mathbf{A}$ determinantning barcha hadlari a_{1j} element bilan boshlanadi, ya'ni

$$r \det_1 \mathbf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{1i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \text{K} a_{i_{k_1+l_1} 1} \text{K} a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \text{K} a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}}$$

Agar a_{1j} ; ba_{1j} almashtirish bajarsak,

$$r \det_1 \mathbf{A}_{1g}(b \cdot a_{1g}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} b \cdot a_{1i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \text{K} a_{i_{k_1+l_1} 1} \text{K} a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \text{K} a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = b \cdot r \det_1 \mathbf{A}$$

3-xossa. Agar $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}(n, \mathbf{H})$ uchun shunday $k \in I_n$ topilsaki, barcha $j = \overline{1, n}$ uchun $a_{kj} = b_j + c_j$ tenglik bajarilsa, barcha $i = \overline{1, n}$ uchun

$$r \det_i \mathbf{A} = r \det_i \mathbf{A}_{kg}(b) + r \det_i \mathbf{A}_{kg}(c),$$

bu yerda $b = (b_1, b_2, \text{K} , b_n)$, $c = (c_1, c_2, \text{K} , c_n)$.

Isbot. $k=1$ va $a_{1j} = b_j + c_j$ bo'lsin. Bu holda,

$$\begin{aligned}
r \det_i \mathbf{A} &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{ii_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \dots K(b_j + c_j) K a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{ii_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \dots K b_j K a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} + \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n-r} a_{ii_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \dots K c_j K a_{i_{k_r+l_r} i_{k_r}} = \\
&= r \det_i \mathbf{A}_{k_g}(b) + r \det_i \mathbf{A}_{k_g}(c).
\end{aligned}$$

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Понизовский И. С. Об определителе матриц с элементами из некоторого кольца // Мат. сб. –1958. – Т. 45 (87), № 1. – С. 3–16.
2. Aslaksen H. **1** Quaternionic determinants // Math. Intelligencer. – 1996. – Vol. 18, no. 3. – P. 57–65.
3. Гельфанд И. М., Ретах В. С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // Функц. анализ и его прил. – 1991. – Т. 25, № 2. – С. 13–35.
4. Гельфанд И. М., Ретах В. С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристические функции графов // Функц. анализ и его прил. –1992. – Т. 26, № 4. –С. 33–45.
5. Chen L. Definition of determinant and Cramer solutions over quaternion field // Acta Math. Sinica (New Ser.). – 1991. – Vol. 7, no. 2. – P. 171–180.
6. Chen L. Inverse matrix and properties of double determinant over quaternion field // Sci. China, Ser. A. – 1991. – Vol. 34. – P. 528–540.
7. Cohen N., De Leo S. The quaternionic determinant // Electron. J. Linear Algebra. – 2000. – Vol. 7. – P. 100–111.
8. Кирчей И. И. Классическая присоединённая матрица для эрмитовой надтелом // Мат. методы и физико-механические поля. – 2001. – Т. 44, № 3. – С. 33–48.